

Bestimmung der Reynolds'schen Spannungen aus Single Pixel Ensemble Korrelation PIV Ergebnissen

Determining Reynolds stresses from single pixel ensemble correlation piv results

Claudia Strobl, Ulrich Jenssen und Michael Manhart

Professur für Hydromechanik, Technische Universität München, Arcisstr. 21, 80333 München

PIV, turbulente Strömungen, Verteilungsfunktion der Geschwindigkeit
particle image velocimetry, turbulents flows, velocity probability density

Zusammenfassung

Die Single Pixel Ensemble Korrelation wird verwendet, um die räumliche Auflösung bei der Auswertung von PIV Datensätzen zu erhöhen. Durch die zeitliche Mittelung der Korrelationsfunktionen sind jedoch keine zeitabhängigen Informationen direkt bestimmbar, aus denen z.B. die Reynoldsspannungen ermittelt werden könnten. Andererseits ist die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeit in der Korrelationsfunktion enthalten und kann mit unterschiedlichen Verfahren rekonstruiert werden. Die Reynoldsspannungen können anschließend durch Integration über die Verteilungsfunktion approximiert werden. In diesem Beitrag wird ein alternativer Ansatz vorgestellt, mit dem die Reynoldsspannungen direkt aus den Momenten der Korrelations- und der Autokorrelationsfunktionen berechnet werden können. Dieser Ansatz wird auf einen experimentellen Datensatz angewandt.

Einleitung

Particle Image Velocimetry (PIV) ist eine nicht-intrusive Methode mit der Geschwindigkeitsfelder instantan gemessen werden können. Das Verfahren beruht darauf, dass die Korrelation zweier zeitlich versetzt aufgenommener Bilder von Partikeln in der Strömung die wahrscheinlichste Verschiebung der Partikel in diesem Zeitfenster darstellt. Geht man nun weiter davon aus, dass die Partikel der Strömung instantan folgen, so kann man von deren Geschwindigkeit auf die Geschwindigkeit der Strömung schließen. In der Regel werden die digitalen Aufnahmen in sogenannte Abtastfenster mit einer Größe von 64x64 bis 16x16 Pixeln unterteilt, welche dann zwischen den beiden Aufnahmen korreliert werden. Die Größe der Fenster definiert die räumliche Auflösung, da die Korrelation einer räumlichen Mittelung über das Abtastfenster entspricht. Sie ist abhängig von der Anzahl der Partikel im gewählten Abtastfenster, da die Statistik bei zu geringer Partikelzahl nicht ausreichend ist, um eine definierte Korrelationsspitze zu erhalten.

Durch die endliche Größe des Abtastfensters wird jedoch die räumliche Auflösung des Verfahrens stark eingeschränkt. In bestimmten Strömungsregionen, zum Beispiel in Wandnähe, ist die maximal mögliche räumliche Auflösung erwünscht. Ein Verfahren um die räumliche Auflösung gegenüber der Abtastfenstertechnik zu erhöhen, ist die Single Pixel Ensemble Korrelation. Dieses Verfahren basiert auf der von Meinhart et. al. (2000) für das Standardverfahren vorgeschlagenen Ensemble Korrelation. Diese verbessert durch die zeitliche Mittelung der Korrelationsfunktionen das Signal-Rausch-Verhältnis und erhöht so die Genauigkeit beim Auffinden der Korrelationsspitze. Westerweel et al. (2004) verwendeten das Verfahren

um die räumliche Auflösung einer Mikro-PIV einer laminaren Strömung auf ein Pixel zu verfeinern. Kähler et. al. (2006) zeigten weiter, dass das Verfahren auch zur Bestimmung zeitlich gemittelter Geschwindigkeiten in turbulenten Strömungen verwendet werden kann.

Durch die zeitliche Mittelung der Funktionen gehen in der Single Pixel Ensemble Korrelation alle zeitabhängigen Informationen verloren, so dass nur die Geschwindigkeitsmittelwerte bestimmt werden können. Eine Möglichkeit, einen Teil der Information über die zeitabhängigen Strömungsgrößen zu rekonstruieren, besteht darin, die in der Korrelationsfunktion enthaltene Geschwindigkeitsverteilungsfunktion (PDF) zu rekonstruieren und auszuwerten. Bisher wurden zwei Ansätze vorgestellt um die PDF aus der Korrelationsfunktion zu rekonstruieren: (1) die Ermittlung der Momente einer in die Korrelationsfunktion eingepassten Gaußkurve (Scharnowski et. al., 2011), (2) die Entfaltung der Korrelationsfunktion mit der Autokorrelationsfunktion (Scharnowski und Kähler, 2013). Das zweite Verfahren ist von der Form der Korrelationsfunktion unabhängig und daher auch in Bereichen mit großen Scherungen und nicht gaußförmigen PDFs anwendbar. Die Möglichkeit der Entfaltung ist jedoch abhängig von der Glätte der zu entfaltenden Funktionen.

Im Folgenden soll ein Verfahren vorgestellt werden, mit dem die höheren Momente der PDF direkt aus den Momenten der Autokorrelation und der Korrelationsfunktion berechnet können ohne dass eine Entfaltung notwendig wäre. Zuerst wird die Theorie des Verfahrens am zweiten Moment, der Varianz, erklärt. Im Anschluss daran werden synthetisch erzeugte Verteilungen und Datensätze ausgewertet. Abschließend werden erste Ergebnisse an einem experimentellen Datensatz vorgestellt.

Theoretische Betrachtung

Die allen PIV Auswerteverfahren zugrunde liegende Korrelationsfunktion kann als Faltung zwischen der PDF der Geschwindigkeit und der Autokorrelationsfunktion angesehen werden (vgl. Adrian, 1988). Betrachtet man daher die Korrelationsfunktion \tilde{R} im Fourierraum, so ergibt sich daraus eine einfache Multiplikation der Fouriertransformierten der Geschwindigkeits-PDF ψ mit der Fouriertransformierten der Autokorrelationsfunktion φ in Abhängigkeit der Wellenzahl s .

$$\tilde{R}(s) = \psi(s)\varphi(s) \quad (1)$$

Im Fourierraum ist das absolute k-te Moment $\langle M^k \rangle$ einer Verteilung γ wie folgt definiert (vgl. Pope, 2001):

$$\langle M^k \rangle = \frac{d^k \gamma(s)}{ds^k} (-i)^k \quad (2)$$

Bestimmt man auf diese Weise das zweite absolute Moment der Korrelationsfunktion, so erhält man die folgende Beziehung zwischen den absoluten Momenten der PDF und der Autokorrelation:

$$\langle M_R^2 \rangle = \langle M_{pdf}^2 \rangle + \langle M_{auto}^2 \rangle \quad (3)$$

Die Umrechnung der absoluten Momente in die zentralen Momente führt unter der Annahme, dass der Mittelwert der Autokorrelation null ist, zu folgender Beziehung für die Varianz der Korrelationsfunktion σ_R^2 .

$$\sigma_R^2 = \sigma_{pdf}^2 + \sigma_{auto}^2 \quad (4)$$

Somit können die Reynolds'schen Spannung direkt aus den Varianzen der Korrelations- und der Autokorrelationsfunktion bestimmt werden.

Synthetische Tests

Um die Anwendbarkeit der soeben beschriebenen Beziehung zu überprüfen, wurden in einem ersten Schritt synthetische Verteilungen für die Geschwindigkeit und Autokorrelation erzeugt, gefaltet und die Varianz der resultierenden Korrelationsfunktion bestimmt. In einem zweiten Schritt wurden synthetische Bilder für die gleichen Geschwindigkeitsverteilungen erzeugt und ausgewertet. Die verwendeten Geschwindigkeitsverteilungen waren einmal Gaußförmig und einmal bimodal verteilt.

Synthetische Verteilungen

Die Mittelwerte und Varianzen der synthetisch erzeugten Verteilungen, wie auch der Korrelationsfunktion R sind in Tabelle 1 dargestellt. Die aus Gleichung (4) berechneten, R_{erwartet} , stimmen mit den über die PDF integrierten, $R_{\text{integriert}}$, Ergebnissen überein. Für eine ideal glatte Funktion ist das Verfahren daher ohne einen Fehler anwendbar.

Gaußförmig				
	PDF	Auto	R_{erwartet}	$R_{\text{integriert}}$
μ_x [Pixel]	2,00	-8,46e-18	2,00	2,00
μ_y [Pixel]	3,00	1,32e-17	3,00	3,00
σ^2_x [Pixel]	4,00	2,00	6,00	6,00
σ^2_y [Pixel]	16,0	2,00	18,00	18,00
σ^2_{xy} [Pixel]	1,32e-17	3,76e-18	-8,88e-16	-2,47e-16
Bimodal				
	PDF	Auto	R_{erwartet}	$R_{\text{integriert}}$
μ_x [Pixel]	-0,50	-2,63e-17	-0,50	-0,50
μ_y [Pixel]	4,00	-4,11e-17	4,00	4,00
σ^2_x [Pixel]	6,25	2,00	8,25	8,25
σ^2_y [Pixel]	5,00	2,00	7,00	7,00
σ^2_{xy} [Pixel]	-3,00	3,57e-17	-3,00	-3,00

Tabelle 1. Mittelwerte und Varianzen der synthetisch erzeugten Verteilungen der PDF und der Autokorrelation, im Vergleich mit den nach Gleichung (4) erwarteten und durch Integration berechneten Momenten.

Synthetische Bilder

In einem zweiten Schritt wurden nun synthetische Bilder der Größe 128x128 Pixel erzeugt. Die Parameter der aufgeprägten Geschwindigkeitsverteilungen entsprechen den in Tabelle 1 angegebenen. Ein Partikelabbild wird mit Hilfe einer zweidimensionalen Gaußfunktion mit einer Standardabweichung von einem Pixel und dem Mittelwert null angenommen. Um die Intensitätsmatrix eines Bildes aufzuspannen wurde das Partikelabbild an seiner jeweiligen Position mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfunktion über die einzelnen Pixel integriert.

Um den Prozess der Single Pixel Ensemble Korrelation zu beschleunigen wurde nicht jeder Pixel des ersten Bildes mit allen Pixeln des Folgebildes sondern mit einem Teilbereich dessen korreliert. Die Größe dieser Korrelationsebene ist an die mittlere Verschiebung und de-

ren Standardabweichung angepasst, so dass die vollständige Korrelationsspitze abgebildet wird. Da maximal 32 768 Bildpaare ausgewertet wurden, sind die Korrelations- wie auch die Autokorrelationsfunktion von statistischem Rauschen umgeben. Um sinnvolle Ergebnisse bei der Berechnung der Statistik zu erhalten wurde daher die Korrelationsspitze vom umgebenden Rauschen freigestellt. Dazu wurden die Gradienten der Korrelationsfunktion berechnet um einen Grenzwert für die Unterscheidung zwischen Rauschen und Korrelationsspitze zu definieren. Im Anschluss daran wurde der Median aller den Grenzwert in den Gradienten unterschreitenden Werte in der Korrelationsmatrix bestimmt und von dieser abgezogen. Dann wurden alle negativen Werte und alle Bereiche kleiner dem erwarteten Durchmesser der Korrelationsfunktion zu null gesetzt, und Mittelwert und Varianz berechnet.

Die so erhaltenen mittleren Verschiebungen und Varianzen wurden dann mit den aufgeprägten verglichen und der Fehler nach Gleichung (5) bestimmt. In Abbildung 1 ist die Fehlermatrix für die Varianz in x-Richtung nach 32 768 ausgewerteten Bildpaare für beide Geschwindigkeitsverteilung dargestellt.

$$error = \frac{X_{berechnet} - X_{erwartet}}{X_{erwartet}} \quad (5)$$

Der Fehler variiert über den ausgewerteten Bereich des Bildes. Dies lässt sich zum Einen damit erklären, dass Partikel für die synthetischen Bilder zufallsmäßig verteilt wurden und somit nicht an jedem Pixel die selbe Anzahl an Stichproben vorliegt. Mit der gewählten Partikel-dichte ergeben sich im Mittel 4200 Stichproben zur Korrelationsberechnung. Zum Anderen führt die Freistellung der Korrelationsspitze zu einer zusätzlichen Schwankung. Deshalb wurden die Fehlerverteilungen hinsichtlich ihres Mittelwertes, Medians und ihrer Schwankungsbreite analysiert. In Tabelle 2 ist eine Übersicht des Fehlers in der Bestimmung der Varianzen beider Geschwindigkeitsverteilungen dargestellt. Mit einer steigenden Anzahl ausgewerteter Bildpaare reduziert sich die Schwankung des Fehlers, da sich die Anzahl der ausgewerteten Informationen je Pixel angleichen und die Korrelationsfunktionen glatter und somit deren Freistellung genauer wird.

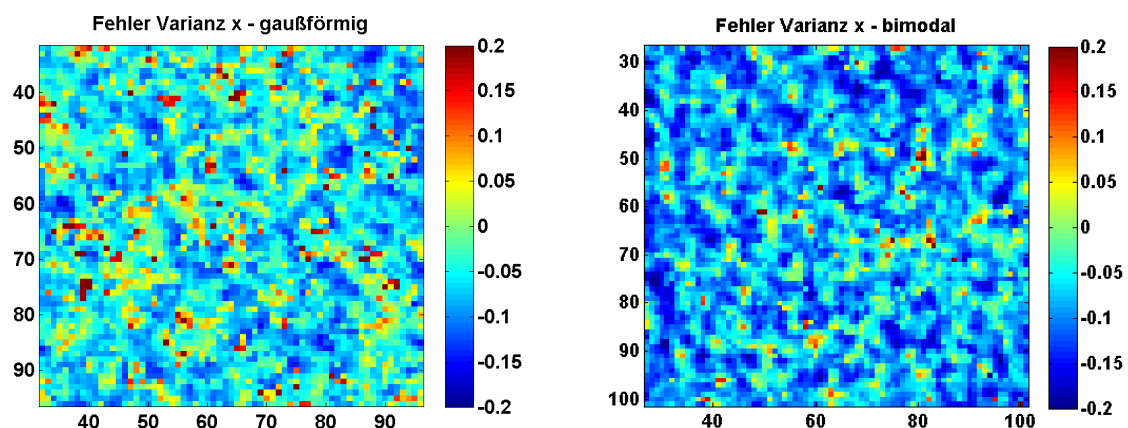


Abbildung 1: Fehler zwischen berechneter und aufgeprägter Varianz in x-Richtung für eine Gaußförmige (links) und eine bimodale (rechts) Geschwindigkeitsverteilung nach 32 768 ausgewerteten Bildpaaren.

Dennoch ist der Fehler mit 8% relativ hoch. Das Verfahren ist deutlich von der Glätte der Korrelationsfunktion bzw. Art und Weise der Differenzierung zwischen Korrelationsspitze und Rauschanteil abhängig.

Bildpaare	Gaußförmig			Bimodal		
	Fehler der berechneten Varianz			Fehler der berechneten Varianz		
	Mittelwert	Median	Standardabweichung	Mittelwert	Median	Standardabweichung
1024	-15,4718	-14,933	9,0836	-6,1667	-5,8473	3,4782
16384	-0,0786	-0,1098	0,3822	-0,1384	-0,1153	0,2318
32768	-0,0872	-0,1163	0,1365	-0,0803	-0,0867	0,0554

Tabelle 2. Mittelwert, Median und Standardabweichung der Fehler bei der Berechnung der Varianz im Bezug zur Varianz der aufgeprägten Geschwindigkeitsverteilung.

Auswertung realer PIV Bilder

Nach den synthetischen Bildern wurde das Verfahren auf einen experimentellen Datensatz angewandt. Der Datensatz besteht aus 27 000 Doppelbildern, aufgenommen im Anströmbe-
reich eines vertikal auf einer Platte montierten Zylinders ($D=10\text{cm}$) bei einer auf den Zylinder bezogenen Reynoldszahl $Re_D=39\ 000$. Im Folgenden werden die Ergebnisse der mittleren Geschwindigkeiten und die Reynolds'schen Spannungen einer Auswertung mit Single Pixel Ensemble Korrelation vorgestellt. Zudem wird an einem vertikalen Profil der Hauptströmungskomponente das Ergebnis mit einer Standard PIV Auswertung verglichen.

Die Standardauswertung wurde mit einer Fenstergröße von 16×16 Pixeln und 50% Überlap-
pfung der Abtastfenster durchgeführt. Die Single Pixel Ensemble Ergebnisse wurden nach dem gleichen Verfahren, wie die synthetischen Bilder ausgewertet, jedoch wurden immer 5×5 Korrelationsfunktionen um den jeweiligen Pixel vor Berechnung der Statistik gemittelt, um die Funktionen zu glätten.

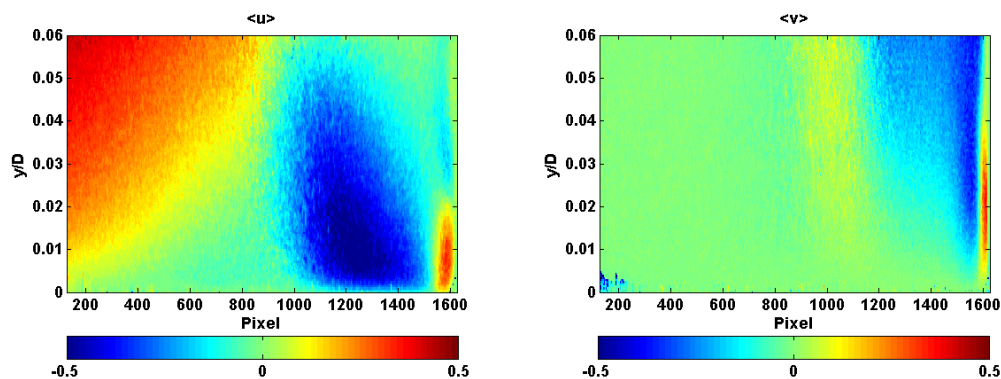


Abbildung 2: Verlauf der mittleren Geschwindigkeiten in horizontaler und vertikaler Richtung direkt vor dem Zylinder ($x_{\text{Zylinder}}=1628$ Pixel)

Betrachtet man den in Abbildung 2 dargestellten Verlauf der mittleren Geschwindigkeiten in horizontaler und vertikaler Richtung, so wird die mit Hilfe der Single Pixel Auswertung erzielte feine räumliche Auflösung deutlich. Insbesondere in der Nähe der Wand ist dies von Bedeutung, da die Geschwindigkeit bis an die Wand heran reicht, vgl. Abbildung 4. So kann aus dem Geschwindigkeitsprofil die Position der Wand, wie auch die Wandschubspannungen bestimmt werden. Im Standardverfahren hingegen können für Bereiche $y/D < 0,0075$ keine verlässlichen Werte erzielt werden. Betrachtet man weiter die Reynolds'schen Spannungen, Abbildung 3, so ist auch hier eine gute räumliche Auflösung zu erkennen, jedoch sind die Schwankungen etwas größer als in den mittleren Geschwindigkeiten. Dies ist auch im Profil, Abbildung 4 rechts, zu erkennen. Liegt die Schwankungsbreite in den mittleren Geschwindigkeiten noch bei rund einem Pixel, so steigt diese bei den Spannungen auf zwei bis vier Pixel an. Dennoch ist das Profil in Wandnähe deutlich feiner aufgelöst und führt die Ergebnisse des Standardverfahrens bis an die Wand heran weiter.

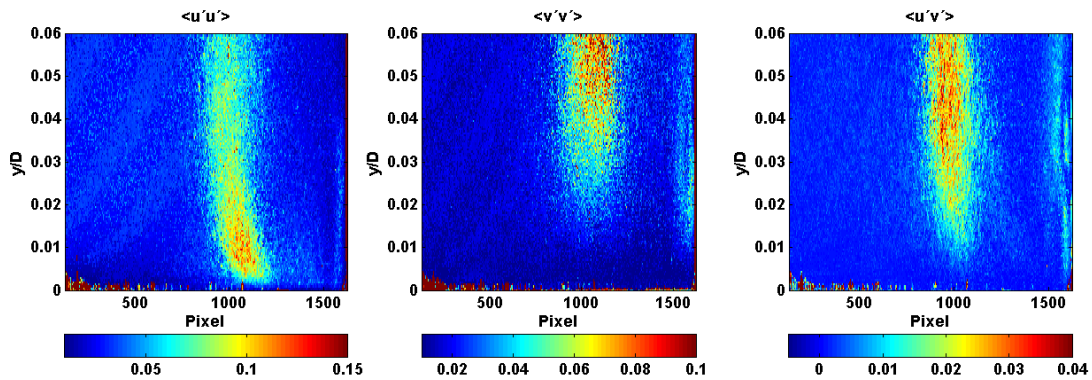


Abbildung 3: Verlauf der Reynolds'schen Spannungen vor dem Zylinder ($x_{\text{Zylinder}}=1628$ Pixel)

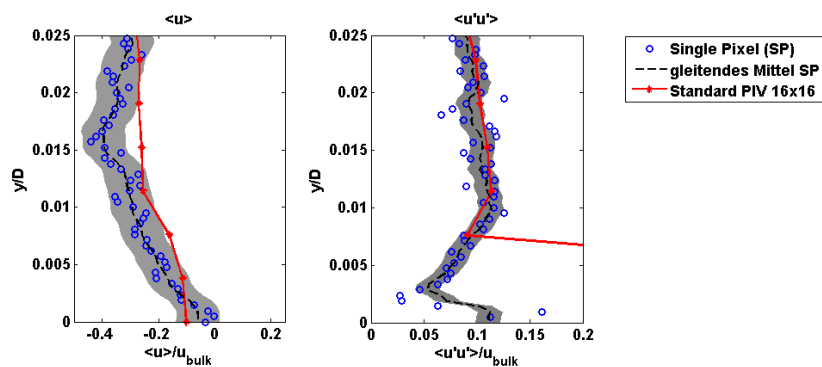


Abbildung 4: Vergleich Single Pixel Ensemble PIV und Standard PIV 16x16 mit 50% Überlappung. Die grauen Bänder stellen die Breite eines / zweier Pixel (Geschwindigkeit/Spannung) dar.

Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde ein Verfahren zur Bestimmung der Reynolds'schen Spannungen direkt aus der Korrelationsfunktion und der Autokorrelation vorgestellt und auf synthetische, wie auch experimentelle Daten angewandt. Weiter wurde eine Möglichkeit die Korrelationsfunktion vom umgebenden Rauschanteil zu differenzieren aufgezeigt, um sinnvolle Werte für die statistischen Momente der Funktionen zu erhalten.

Die Anwendungen der neuen Methode auf synthetische Bilder zeigt, dass dieses Verfahren unabhängig von der Form der Verteilungsfunktion ist. Bei der Auswertung von 32 000 synthetischen Bilder mit Single Pixel Ensemble Korrelation lag der mittlere Fehler in der Berechnung der Reynolds'schen Spannungen bei etwas unter 10%. Die Genauigkeit hängt hierbei nur davon ab, wie gut die Varianzen der Korrelationsfunktion und der Autokorrelationsfunktion bestimmt werden können. Daher wurden bei der Auswertung der experimentellen Ergebnisse 5x5 Korrelationsfunktionen gemittelt, um diese zu glätten. Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit denen des Standardverfahrens und ermöglichen so eine feinere räumliche Auflösung im wandnahen Bereich.

Das vorgestellte Verfahren kann mit Hilfe von Gleichung (2) leicht erweitert werden, um auch die höheren Momente der Geschwindigkeitsverteilungsfunktion zu bestimmen. Die Korrelations- wie auch die Autokorrelationsfunktion müssen hierfür jedoch hinreichend glatt sein. Daher ist entweder eine Glättung der Korrelationsfunktionen, z.B. durch Mittelung nötig, oder der Rauschanteil muss auf eine andere Weise definiert und entfernt werden.

Literatur

- Adrian, R. J., 1988: "Double exposure, multiple-field particle image velocimetry for turbulent probability density". *Optics and Lasers in Engineering* (9), pp. 211– 228
- Kähler, C. J., Scholz, U. und Ortmanns, J., 2006: "Wall-shear-stress and near-wall turbulence measurements up to single pixel resolution by means of long-distance micro-piv" *Experiments in Fluids*, Vol. 41, No. 2, pp. 327-341
- Meinhart, C. D., Werely S.T., 2000: "A PIV algorithm for estimating time-averaged velocity fields", *Journal for Fluids Engineering*, 122, pp. 285-289
- Pope, S. B., 2001: "Turbulent Flows", Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, Appendix I
- Scharnowski, S. und Kähler, C. J., 2013: "Methods for estimating higher order moments from piv data" In 10th International Symposium on Particle Image Velocimetry - PIV13, Delft, The Netherlands, July 1-3, 2013
- Scharnowski, S., Hain, R. und Kähler, C. J., 2011: "Reynolds stress estimation up to single-pixel resolution using piv-measurements", *Experiments in Fluids*, Vol. 52, No. 4, pp. 985-1002
- Westerweel, J., Geelhoed, P. F. und Lindken, R., 2004: "Single-pixel resolution ensemble correlation for micro-piv applications" *Experiments in Fluids*, Vol. 37, No. 3, pp. 375–384