

## Kombinierter Bias-Effekt in LDA-Messungen von Scherströmungen mit hohen Schergefällen und hoher Turbulenzintensität

Zh. Zhang

Rütschi Fluid AG  
CH-5200 Brugg, Schweiz  
Email: zhengji.zhang@grupperutschi.com

### Zusammenfassung

Diese Arbeit zeigt die LDA-Methode zur Messung von Scherströmungen mit hohen Schergefällen wie auch hoher Turbulenzintensität. Generell tritt bei Messungen von solchen Strömungen der kombinierte Bias-Effekt auf. Der Geschwindigkeitsbias entsteht zum einen durch die Strömungsturbulenz und zum zweiten durch das Scherprofil der Strömung im Bereich des LDA-Messvolumens. Für Scherströmungen mit niedriger Turbulenzintensität konnte der kombinierte Bias-Effekt in einer früheren Untersuchung genau erfasst werden. Insbesondere gilt der arithmetische Mittelwert der Geschwindigkeit unter dem Einfluss des Geschwindigkeitsbias exakt als der Mittelwert der Geschwindigkeit für die Impulsstromdichte. In der vorliegenden Arbeit ist die Methode auf die Messung von Scherströmungen mit hohen Schergefällen und hoher Turbulenzintensität erweitert worden.

### 1. Einleitung

Die LDA-Methode mit ihrem hohen zeitlichen und räumlichen Auflösungsvermögen eignet sich besonders für die Messung von Strömungen mit hoher Turbulenz und örtlicher Verteilung. Wegen der kleinen Abmessung des Messvolumens (Dicke von ca. 0.1 mm und Länge von 0.3 bis 2 mm) ist die Strömung im Bereich des Messvolumens oft als gleichmäßig angenommen worden. Dies ist rational, solange die Messstelle genügend weit von der die Strömung abgrenzenden Wand (Grenzschicht) entfernt ist und der Geschwindigkeitsgradient in der Scherströmung relativ klein oder in den Turbulenzballen statistisch gesehen nicht vorhanden ist. Aus den Messdaten können verschiedene Mittelwerte der Geschwindigkeit und Turbulenzgrößen berechnet werden, mit oder ohne Berücksichtigung des Bias-Effektes aufgrund der Geschwindigkeitsschwankungen. Unter dem Bias-Effekt versteht man, dass die Ankunftsrate von Tracerpartikeln in einer turbulenten Strömung dem Betrag der momentanen Geschwindigkeit proportional ist. Der damit verbundene „Messfehler“ ist bisher fast ausschließlich bei Messungen von turbulenten Strömungen betrachtet worden, siehe McLaughlin und Tiederman 1973, Nobach 1998 und Zhang 2002. Zu erwähnen ist, dass der lediglich von der Strömungsturbulenz hervorgerufene Bias-Effekt bei Messungen von turbulenzarmen Strömungen ( $Tu < 0.5$ ) direkt zur mittleren Geschwindigkeit für die Impulsstromdichte führt. Die Messungen sind daher nicht fehlerbehaftet, siehe Zhang 2010a und 2010b.

Bei LDA-Messungen von turbulenten Scherströmungen (Abb. 1) verursachen die Strömungsturbulenz und das Scherprofil im Bereich des Messvolumens den kombinierten Geschwindigkeitsbias. Bekanntlich verursacht z. B. das Scherprofil der Strömung die Überschätzung der lokalen Turbulenzintensität. Die Trennung von beiden Bias-Effekten aus Messungen, wie in Zhang 2010a und 2010b gezeigt wurde, ist bei Strömungen mit niedriger Turbulenzintensität ( $Tu < 0.5$ ) gut möglich. Obwohl in Zhang's Arbeiten nicht explizite erwähnt wurde, gelten

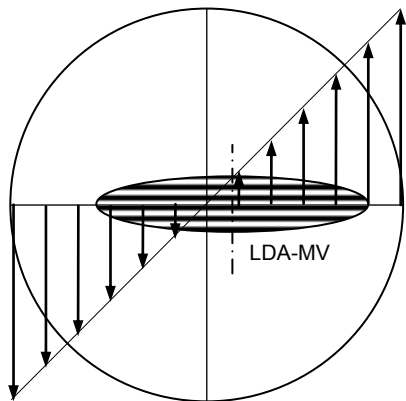


Abb. 1 Turbulente Scherströmung im Bereich des LDA-Messvolumens

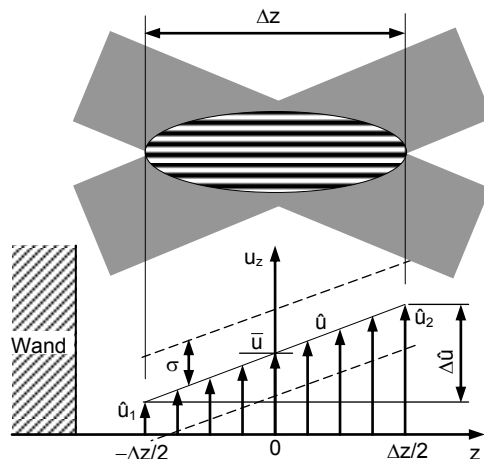


Abb. 2 LDA-Messvolumen und seine Orientierung in der turbulenten Scherströmung

die Ergebnisse auch nur für die Scherströmungen mit schwachen Schergefällen ( $|\Delta\hat{u}/\bar{u}| \leq 2$ ). Darunter sind Scherströmungen mit einheitlicher Strömrichtung innerhalb des Messvolumens ( $\hat{u} > 0$  oder  $\hat{u} < 0$ ) gemeint.

Zum Vervollständigen der Kenntnisse über derartige kombinierte Bias-Effekte wird in der vorliegenden Arbeit im Anschluss an die Untersuchung von Zhang 2010a die Methode allgemein auf die Scherströmungen mit hohen Schergefällen wie auch hoher Turbulenzintensität bis zur  $Tu = \infty$  erweitert. Die Rechenergebnisse gelten dann als Referenzen für die Bewertung der Messgenauigkeit in solchen LDA-Anwendungen.

Als Erstes wird aus numerischer Validierung gezeigt, dass die in Zhang 2010a und 2010b vorgestellte Methode, wie oben erwähnt, bei Messungen von turbulenzarmen Scherströmungen hoch genau funktioniert.

## 2. Messmethode und Validierung für Scherströmungen mit $Tu < 0.5$ und $|\Delta\hat{u}/\bar{u}| \leq 2$

Das LDA-Messvolumen mit seiner Orientierung in einer eindimensionalen Scherströmung ist in Abb. 2 veranschaulicht. Die zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsverteilung im Bereich des LDA-Messvolumens ist linear in Approximation, gegeben durch

$$\hat{u} = \bar{u} + az \quad (1)$$

Die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{u}$  ist am Center des Messvolumens ( $z=0$ ) zu finden. Die Differenz zwischen den beiden Geschwindigkeiten jeweils an beiden Enden des Messvolumens ist  $\Delta\hat{u}$ . Die Bedingung  $|\Delta\hat{u}/\bar{u}| \leq 2$  gibt an, dass die zeitlichen Mittelwerte  $\hat{u}$  der Geschwindigkeit innerhalb des Messvolumens die einheitliche Richtung aufweisen (entweder  $\hat{u} > 0$  oder  $\hat{u} < 0$ ). Weiter wird konstante Standardabweichung ( $\sigma$ ) der Geschwindigkeit um die zeitlichen Mittelwerte  $\hat{u}$  angenommen. Für die Strömungen unter diesen Bedingungen und mit kleiner Turbulenzintensität ( $Tu < 0.5$ ) wurde in Zhang 2010a und 2010b die Methode zur Berechnung und Trennung von beiden kombinierten Bias-Effekten gezeigt. Die Methode geht von den folgenden arithmetischen Mittelungen von Messdaten aus:

$$\bar{u}_{\text{bias}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \quad (2)$$

$$\overline{u^2}_{\text{bias}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^2 \quad (3)$$

$$\overline{u_{\text{app,bias}}'^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u}_{\text{bias}})^2 \quad (4)$$

Dabei ist für turbulenzarme Strömungen ( $Tu < 0.5$ ) der arithmetische Mittelwert  $\bar{u}_{\text{bias}}$  unter dem Bias-Effekt gleich der mittleren Geschwindigkeit für die Impulsstromdichte ( $\bar{u}_J = \bar{u}_{\text{bias}}$ ). Unter gleicher Bedingung ( $Tu < 0.5$ ) ist die repräsentative mittlere Geschwindigkeit für die Energiestromdichte nach Gl. (3) mit  $u_E^2 = u_{\text{bias}}^2$  zu berechnen. Gl. (4), wenn multipliziert mit  $\rho$ , gibt die kombinierte turbulente Normalspannung an, die der Reynolds-Normalspannung nicht mehr entspricht. Das Subskript „app“ (apparent in Englisch) vermerkt die scheinbare Auswirkung des Scherprofils der Strömung im Bereich des Messvolumens.

Ausgehend von den obigen Annahmen und Berechnungen sind eine Reihe von Beziehungen für die Messung von Scherströmungen „generell“ mit schwachen Schergeländen und niedriger Turbulenzintensität gefunden worden. Aufgrund den vorliegenden Untersuchungen (unten Paragraph 3) kann die „generelle“ Bedingung zu  $Tu < 0.5 - 0.15|\Delta\hat{u}/\bar{u}|$  detailliert werden. In Tabelle 1 sind solche Beziehungen zusammengestellt.

Tabelle 1: Messungen von turbulenten Scherströmungen mit  $|\Delta\hat{u}/\bar{u}| \leq 2$  und  $Tu < 0.5 - 0.15|\Delta\hat{u}/\bar{u}|$ :

$\frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\bar{u}} = 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta\hat{u}}{\bar{u}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma}{\bar{u}} \right)^2 \quad (5)$	$\overline{u_{\text{app},0}'^2} = \overline{u'^2} + \frac{1}{12} (\Delta\hat{u})^2 \quad (11)$
$\frac{\overline{u_{\text{bias}}'^2}}{\bar{u}^2} = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta\hat{u}}{\bar{u}} \right)^2 + 3 \frac{\sigma^2}{\bar{u}^2} \quad (6)$	$\overline{u_{\text{app},0}'^2} = \bar{u} (\bar{u}_{\text{bias}} - \bar{u}) \quad (12)$
$3 \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\bar{u}} - \frac{\overline{u_{\text{bias}}'^2}}{\bar{u}^2} = 2 \quad (7)$	$\overline{u_{\text{app,bias}}'^2} = (2\bar{u} - \bar{u}_{\text{bias}}) (\bar{u}_{\text{bias}} - \bar{u}) \quad (13)$
$\bar{u} = \frac{1}{4} \left( 3\bar{u}_{\text{bias}} + \sqrt{9\bar{u}_{\text{bias}}^2 - 8\overline{u_{\text{bias}}'^2}} \right) \quad (8)$	$\overline{u_{\text{app,bias}}'^2} = \left( 2 - \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\bar{u}} \right) \cdot \overline{u_{\text{app},0}'^2} \quad (14)$
$\sigma^2 = \overline{u'^2} = \left( \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\bar{u}} - 1 \right) \bar{u}^2 - \frac{1}{12} (\Delta\hat{u})^2 \quad (9)$	$\overline{u_{\text{app,bias}}'^2} = \left( 2 - \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\bar{u}} \right) \left( \overline{u'^2} + \frac{1}{12} (\Delta\hat{u})^2 \right) \quad (15)$
$\bar{u} = \frac{1}{4} \left( 3\bar{u}_{\text{bias}} + \sqrt{\bar{u}_{\text{bias}}^2 - 8\overline{u_{\text{app,bias}}'^2}} \right) \quad (10)$	$\frac{\overline{u_{\text{app,bias}}'^2}}{\bar{u}^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \frac{(\Delta\hat{u})^2}{\bar{u}^2} - \frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}^2} \right)^2 \quad (16)$

Dabei repräsentiert  $\overline{u_{\text{app},0}'^2}$  in Gl. (11) und (12), wenn multipliziert mit  $\rho$ , die scheinbare turbulente Normalspannung als Folge des Schergeländes in der Strömung längs des Messvolumens, ohne den Effekt des turbulenzbedingten Geschwindigkeitsbias zu enthalten. Die Bestandteile der kombinierten Bias-Effekte sind somit sauber getrennt worden. Aus den zwei arithmetischen Mittelwerten  $\bar{u}_{\text{bias}}$  und  $\overline{u_{\text{app,bias}}'^2}$  kann die mittlere volumetrische Geschwindigkeit  $\bar{u}$  und weiter die Reynolds-Normalspannung  $\rho \overline{u'^2}$  nach Gl. (9) bestimmt werden.

Zu bemerken ist, dass die Berechnungen von Gl. (5) bis (9) allgemein gültig (frei von den Bedingungen  $|\Delta\hat{u}/\bar{u}| \leq 2$  und  $Tu < 0.5 - 0.15|\Delta\hat{u}/\bar{u}|$ ) sind, wenn  $\bar{u}_{\text{bias}}$  durch  $\bar{u}_J$  und  $\overline{u_{\text{app,bias}}'^2}$  durch  $u_E^2$  ersetzt sind, siehe die Abschnitte 3.1 und 3.2 unten.

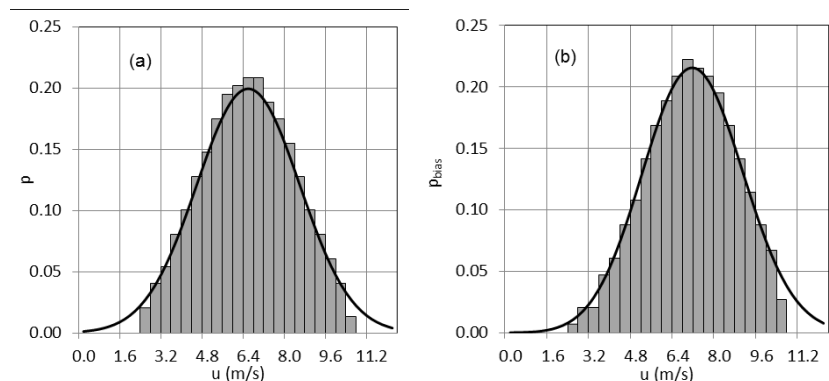
Für die Strömung mit gleichförmiger Geschwindigkeit ( $\Delta\hat{u} = 0$ ) innerhalb des Messvolumens vereinfachen sich alle Gleichungen dementsprechend.

Die allen oben angegebenen Beziehungen, die miteinander verknüpft sind, sollen numerisch validiert werden. Dafür werden längs eines gedachten Messvolumens 12 Datenreihen mit linearsteigendem Mittelwert von  $\hat{u}_1 = 5$  auf  $\hat{u}_{12} = 7.2$  betrachtet. Die Differenz beträgt  $\Delta\hat{u} = 2.2$ . Tabelle 2 zeigt die entsprechenden Daten. Die Datenzahl  $N_i$  in einer Datenreihe ist proportional zu der mittleren Geschwindigkeit  $\hat{u}_i$  (Bias-Effekt). Die Geschwindigkeitsdaten sind so produziert, dass im Bereich von  $(\hat{u}_i - 2\sigma)$  bis  $(\hat{u}_i + 2\sigma)$  die Gauß'sche Verteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_{\text{Gauss}}$ ) vorliegt. Abb. 3a zeigt beispielhaft die Geschwindigkeitsverteilung der 7. Datenreihe mit  $\hat{u}_7 = 6.2$  und  $\sigma = 1.76$ . Die Geschwindigkeitsdaten in jeder Datenreihe sind dann dem Bias-Effekt entsprechend unter der Verwendung der „verzerrten“ Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_{\text{bias}} = k u p_{\text{Gauss}}$  abgeändert. Die Konstante  $k$  muss die Bedingung  $\int p_{\text{bias}} du = 1$  erfüllen, siehe Zhang 2002. Abb. 3b zeigt die zur Abb. 3a gehörige Geschwindigkeitsverteilung, die offenbar „verzerrt“ ist (asymmetrisch).

Tabelle 2: Daten zur Simulation der kombinierten Bias-Effekte in einer turbulenten Scherströmung mit ( $\bar{u} = 6.1$ ,  $\Delta\hat{u} = 2.2$  und  $\sigma = 1.76$ ):

Reihe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$N_i$	300	312	324	336	348	360	372	384	396	408	420	432
$\hat{u}_i$	5	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2
Nr	u											
1	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00	3.20
2	1.12	1.31	1.51	1.71	1.90	2.10	2.29	2.49	2.69	2.89	3.08	3.28
3	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:

Abb. 3: Wahrscheinlichkeitsdichte der Geschwindigkeit, betrachtet ist Datenreihe 7.  
 (a) Gauß'sche Verteilung  
 (b) Mit Verzerrung aufgrund des Bias-Effektes



Es liegen nun nach Tabelle 2 total 4392 Daten aus 12 Datenreihen. Sie simulieren die Messdaten unter dem Einfluss des kombinierten Bias-Effektes. Aus allen diesen Daten können

$\bar{u}_{\text{bias}}$ ,  $\overline{u_{\text{bias}}^2}$  und  $\overline{u_{\text{app,bias}}'^2}$  jeweils nach Gl. (2), (3) und (4)

berechnet werden. Folglich lassen sich alle Beziehungen in Gl. (5) bis Gl. (16) überprüfen (Tabelle 3). Offenbar konnten alle Gleichungen hoch genau validiert werden. Die kleine Abweichung ist zum einen auf die begrenzten Daten im Geschwindigkeitsintervall von  $(\hat{u}_i - 2\sigma)$  bis  $(\hat{u}_i + 2\sigma)$  und zum anderen auf das folgenschwere Abschnitten von Messdaten oberhalb  $(\hat{u}_i + 2\sigma)$  zurückzuführen (Abb. 3b). Zu erwähnen ist, dass die Ableitungen von Gln. (5) bis (16) auf die Gauß'sche Verteilung der Geschwindigkeiten von  $u = -\infty$  bis  $u = \infty$  basierten.

Tabelle 3: Validierungsergebnisse

Gleichungen	links	rechts
Gl. (5)	1.10	1.09
Gl. (6)	1.29	1.28
Gl. (7)	2.0	2.0
Gl. (8)	6.10	6.12
Gl. (9)	3.10	3.27
Gl. (10)	6.10	6.12
Gl. (13)	3.22	3.31
Gl. (14)	3.22	3.31
Gl. (15)	3.22	3.31
Gl. (16)	0.087	0.089

### 3. Erweiterung der Messmethode

Die Betrachtungen oben im Abschnitt 2 gelten für die Scherströmungen mit  $|\Delta\hat{u}/\bar{u}| \leq 2$  und niedriger Turbulenzintensität  $Tu < 0.5 - 0.15|\Delta\hat{u}/\bar{u}|$ . Die Bedingung  $|\Delta\hat{u}/\bar{u}| \leq 2$  gibt an, dass die Geschwindigkeit im Bereich des LDA-Messvolumens einheitlich positive ( $\hat{u} \geq 0$ ) oder negative ( $\hat{u} \leq 0$ ) ist. Im vorliegenden Abschnitt soll die Methode auf die Messung von Scherströmungen mit hohen Schergefällen  $|\Delta\hat{u}/\bar{u}| \geq 2$  und hoher Turbulenzintensität erweitert werden.

Für die Scherströmung im Bereich des LDA-Messvolumens, die die Gauß'sche Verteilung  $p_z$  der Geschwindigkeit an der Stelle  $z$  aufweist, kann die vom Bias-Effekt beeinflusste Wahrscheinlichkeitsdichte im ganzen Bereich des Messvolumens folgendes formuliert werden:

$$p_{\text{bias}}(u, z) = \frac{1}{N} \frac{d^2 N}{du dz} = k|u|p_z \quad \text{mit} \quad p_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\hat{u})^2}{2\sigma^2}} \quad (17)$$

Der Mittelwert der Geschwindigkeit in der lokalen Gauß'schen Verteilung  $p_z$  ändert sich linear längs des Messvolumens, siehe Gl. (1) und Abb. 2. Mit  $|u|$  ist auch die Scherströmung berücksichtigt worden, die aus  $\hat{u} \geq 0$  und  $\hat{u} \leq 0$  d.h.  $|\Delta\hat{u}/\bar{u}| > 2$  (hohes Schergefälle) besteht.

Die Konstante  $k$  muss aus der folgenden Bedingung bestimmt werden:

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\text{bias}} du dz = 1 \quad \text{bzw.} \quad \int_{z_1}^{z_2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k|u|}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\hat{u})^2}{2\sigma^2}} du \right) dz = 1 \quad (18)$$

Nach ausgiebigen Berechnungen ergibt sich die folgende Gleichung für die Bestimmung der Konstante  $k$ :

$$\frac{2a}{k\bar{u}^2} \frac{\bar{u}^2}{\sigma^2} = \left(1 + \frac{\hat{u}_2^2}{\sigma^2}\right) \text{erf}\left(\frac{\hat{u}_2}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \left(1 + \frac{\hat{u}_1^2}{\sigma^2}\right) \text{erf}\left(\frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \sqrt{2} \left( \frac{\hat{u}_2}{\sigma} e^{-\frac{\hat{u}_2^2}{2\sigma^2}} - \frac{\hat{u}_1}{\sigma} e^{-\frac{\hat{u}_1^2}{2\sigma^2}} \right) \quad (19)$$

Darin ist  $a$  die Steigung der linearen Geschwindigkeitsverteilung im Bereich des Messvolumens, siehe Gl. (1). Da der Ausdruck  $2a/k\bar{u}^2$  in den weiteren Berechnungen stets in dieser geschlossenen Form bleibt, wird dieser durch die Konstante  $\lambda$  dargestellt:

$$\lambda = \frac{2a}{k\bar{u}^2} \quad (20)$$

Die Funktion  $\text{erf}(x)$  in Gl. (19) ist die Gauß'sche Fehlerfunktion.

#### 3.1 Mittlere Geschwindigkeit der Impulsstromdichte

Die Impulsstromdichte ist eine Vektorgröße, die in die Richtung der Strömung ausgerichtet ist. Unter der Annahme der parallelen Strömung innerhalb des Messvolumens (Abb. 1 und 2) kann die Impulsstromdichte als eine skalare Größe erfasst werden. Mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_z$ , die in Gl. (17) gegeben ist, berechnet sich die Impulsstromdichte an der Stelle  $z$  (mit  $\rho$  als spezifische Dichte des Fluides):

$$\bar{J}_z = \rho \int_{-\infty}^{\infty} p_z u^2 du = \rho(\sigma^2 + \hat{u}^2) \quad (21)$$

Der globale Mittelwert im ganzen Bereich des LDA-Messvolumens ist somit

$$\bar{\bar{J}} = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} \bar{J}_z dz = \rho(\sigma^2 + \bar{u}^2) + \frac{\rho}{3} a^2 (z_2^2 + z_1 z_2 + z_1^2) \quad (22)$$

Mit  $az_1 = -\Delta\hat{u}/2$  und  $az_2 = \Delta\hat{u}/2$  erhält man schlussendlich

$$\bar{J} = \rho(\sigma^2 + \bar{u}^2) + \rho \frac{\Delta\hat{u}^2}{12} \quad (23)$$

Mit  $\bar{J} = \rho\bar{u}_j\bar{u}$  berechnet sich dann

$$\beta = \frac{\bar{u}_j}{\bar{u}} = 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta\hat{u}}{\bar{u}} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{\bar{u}^2} \quad (24)$$

Sie ist gleich der Gl. (5).

### 3.2 Mittlere Geschwindigkeit der Energiestromdichte

Wie für die Impulsstromdichte berechnet sich die Energiestromdichte an der Stelle z gleicherweise

$$\dot{E}_z = \frac{\rho}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p_z u^3 du = \frac{\rho}{2} \hat{u}^3 \left( 1 + 3 \frac{\sigma^2}{\hat{u}^2} \right) \quad (25)$$

Der globale Mittelwert im ganzen Bereich des LDA-Messvolumens ist dann zu berechnen

$$\bar{E} = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} \dot{E}_z dz = \frac{\rho}{2} \left[ 3\sigma^2\bar{u} + \bar{u}^3 + \frac{\bar{u}}{4} (\Delta\hat{u})^2 \right] \quad (26)$$

Mit  $\bar{E} = \frac{1}{2} \rho \overline{u^2} \cdot \bar{u}$  erhält man ein weiteres Verhältnis

$$\alpha = \frac{\overline{u^2}}{\bar{u}^2} = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta\hat{u}}{\bar{u}} \right)^2 + 3 \frac{\sigma^2}{\bar{u}^2} \quad (27)$$

Man vergleicht diese Gleichung mit Gl. (6).

### 3.3 Zusammenhang zwischen $\bar{u}$ , $\bar{u}_j$ und $\overline{u^2}$

Aus Gln. (24) und (27) ergibt sich

$$3\beta - \alpha = 2 \quad (28)$$

Diese Gleichung kann auch geschrieben werden bei

$$\bar{u} = \frac{1}{4} \left( 3\bar{u}_j + \sqrt{9\bar{u}_j^2 - 8\overline{u^2}} \right) \quad (29)$$

### 3.4 Mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}_{\text{bias}}$

Mit der Wahrscheinlichkeitsdichte gemäß Gl. (17) kann der globale Mittelwert der Geschwindigkeit unter dem kombinierten Bias-Effekt folgendes berechnet werden:

$$\bar{u}_{\text{bias}} = \int_{z_1}^{z_2} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\text{bias}} u du dz \quad \text{bzw.} \quad \bar{u}_{\text{bias}} = \int_{z_1}^{z_2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k|u|u}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\hat{u})^2}{2\sigma^2}} du \right) dz \quad (30)$$

Nach weiteren Berechnungen und unter der Berücksichtigung der Konstante  $\lambda$  erhält man

$$\frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\bar{u}} = \frac{2}{\lambda} \frac{\sigma^3}{\bar{u}^3} \left\{ \frac{\hat{u}_2}{\sigma} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{\hat{u}_2^2}{\sigma^2} \right) \text{erf} \left( \frac{\hat{u}_2}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \frac{\hat{u}_1}{\sigma} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{\hat{u}_1^2}{\sigma^2} \right) \text{erf} \left( \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \left( 1 + \frac{\hat{u}_2^2}{2\sigma^2} \right) e^{-\frac{\hat{u}_2^2}{2\sigma^2}} - \left( 1 + \frac{\hat{u}_1^2}{2\sigma^2} \right) e^{-\frac{\hat{u}_1^2}{2\sigma^2}} \right] \right\} \quad (31)$$

Der kombinierte Einfluss des Bias-Effektes auf den globalen Mittelwert der Geschwindigkeit ist somit berechnet worden. Unter der Berücksichtigung von folgenden Beziehungen

$$\frac{\hat{u}_1}{\sigma} = \frac{\bar{u}}{\sigma} \left(1 - \frac{\Delta\hat{u}}{2\bar{u}}\right) \text{ und } \frac{\hat{u}_2}{\sigma} = \frac{\bar{u}}{\sigma} \left(1 + \frac{\Delta\hat{u}}{2\bar{u}}\right) \quad (32)$$

kann Gl. (31) generell folgendes dargestellt werden

$$\frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\bar{u}} = f\left(\frac{\Delta\hat{u}}{\bar{u}}, \frac{\sigma}{\bar{u}}\right) \text{ bzw. } \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\bar{u}} = f\left(\frac{\Delta\hat{u}}{\bar{u}}, Tu\right) \quad (33)$$

Abb. 4 zeigt die entsprechenden Rechenergebnisse. Miteingezeichnet sind auch die mittleren Geschwindigkeiten  $\bar{u}_j/\bar{u}$  für die Impulsstromdichte nach Gl. (24). Offenbar erkennt man, dass unter den Bedingungen  $|\Delta\hat{u}/\bar{u}| \leq 2$  und  $Tu < 0.5 - 0.15|\Delta\hat{u}/\bar{u}|$  die Gleichheit  $\bar{u}_{\text{bias}} = \bar{u}_j$  besteht, wie auch unten der Sonderfall zeigt.

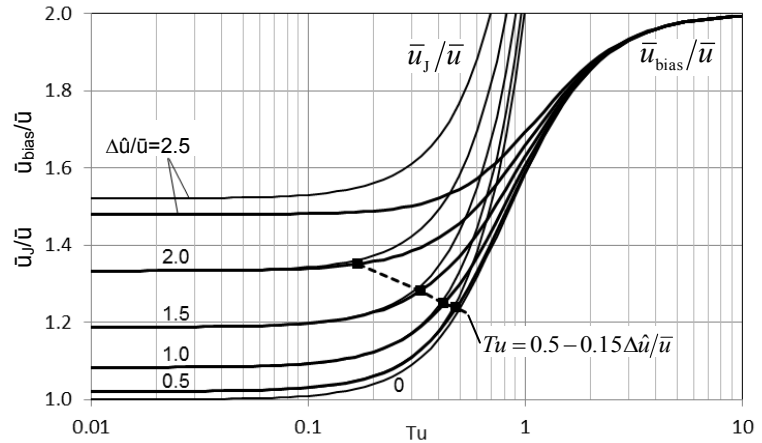


Abb. 4: Mittlere Geschwindigkeiten  $\bar{u}_j$  und  $\bar{u}_{\text{bias}}$  in Funktion der Turbulenzintensität bei Scherströmungen mit verschiedenen Schergefällen

#### Sonderfall mit $Tu \ll 1$ :

Für die turbulenzarmen ( $Tu \ll 1$ ) Scherströmungen mit  $\hat{u}_1 > 0$  und  $\hat{u}_2 > 0$  (d.h.  $\Delta\hat{u}/\bar{u} < 2$ ) sind die Gauß'sche Fehlerfunktion in Gl.

(19) gleich eins und die Exponentialfunktion gleich null. Somit erhält man zuerst aus Gln. (19) und (20)

$$\lambda = \frac{\hat{u}_2^2}{\bar{u}^2} - \frac{\hat{u}_1^2}{\bar{u}^2} = 2 \frac{\Delta\hat{u}}{\bar{u}} \quad (34)$$

Weiter ergibt sich aus Gl. (31)

$$\frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\bar{u}} = 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta\hat{u}}{\bar{u}}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{\bar{u}^2} \quad (35)$$

Sie ist gleich der Gl. (24).

#### Bemerkung zum Fall $|\Delta\hat{u}/\bar{u}| \geq 2$ :

Der Fall mit  $|\Delta\hat{u}/\bar{u}| \geq 2$  bedeutet  $\hat{u}_1 \leq 0$  und  $\hat{u}_2 > 0$  im Bereich des Messvolumens. Da die negative Geschwindigkeit bereits in  $\hat{u}$ -Verteilung teilweise vorhanden ist, ist  $\bar{u}_{\text{bias}} \neq \bar{u}_j$  selbst bei turbulenzarmen Strömungen zu erwarten (Abb. 4). Dies kann jeweils aus Gl. (31) und (24) festgestellt werden. Aus Gl. (31) mit  $|\sigma/\hat{u}_1| \ll 1$ ,  $\hat{u}_1 < 0$  und  $\hat{u}_2 > 0$  erhält man

$$\frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\bar{u}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + 3(\Delta\hat{u}/2\bar{u})^2}{1 + (\Delta\hat{u}/2\bar{u})^2} \quad (36)$$

Aus Gl. (24) ergibt sich für  $|\sigma/\bar{u}| \ll 1$  jedoch ein anderes Ergebnis

$$\frac{\bar{u}_j}{\bar{u}} = 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta\hat{u}}{\bar{u}}\right)^2 \quad (37)$$

### 3.5 Mittlere Standardabweichung der Geschwindigkeit

Von der Definition her berechnet sich der scheinbare und bias-behaftete Mittelwert der turbulenten Normalspannung bei

$$\overline{\rho u'^2_{\text{app,bias}}} = \rho \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u}_{\text{bias}})^2 = \rho \int_{z_1}^{z_2} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\text{bias}} (u - \bar{u}_{\text{bias}})^2 du dz \quad (38)$$

Mit Gl. (17) lässt sich schreiben

$$\overline{u'^2_{\text{app,bias}}} = \int_{z_1}^{z_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k|u|}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\hat{u})^2}{2\sigma^2}} (u - \bar{u}_{\text{bias}})^2 du dz \quad (39)$$

Dabei ist die Konstante  $k$  nach Gl. (19) zu berechnen.

Die erste Integralrechnung in der obigen Gleichung führt zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k|u|}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\hat{u})^2}{2\sigma^2}} (u - \bar{u}_{\text{bias}})^2 du = \quad (40)$$

$$\frac{2k\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ 2\sigma^2 + (\hat{u} - \bar{u}_{\text{bias}})^2 \right] e^{-\frac{\hat{u}^2}{2\sigma^2}} + k\sigma^2 \left[ 3\hat{u} - 2\bar{u}_{\text{bias}} + (\hat{u} - \bar{u}_{\text{bias}})^2 \frac{\hat{u}}{\sigma^2} \right] \text{erf}\left(\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Es ergibt sich aus Gl. (39) schlussendlich

$$\frac{\overline{u'^2_{\text{app,bias}}}}{\bar{u}^2} = A_2 \text{erf}\left(\frac{\hat{u}_2}{\sqrt{2}\sigma}\right) - A_1 \text{erf}\left(\frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) + B_2 e^{-\frac{\hat{u}_2^2}{2\sigma^2}} - B_1 e^{-\frac{\hat{u}_1^2}{2\sigma^2}} \quad (41)$$

mit

$$A_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\sigma^4}{\bar{u}^4} \left( 3 \frac{\hat{u}_1^2}{\sigma^2} + \frac{\hat{u}_1^2}{\sigma^2} \frac{\bar{u}_{\text{bias}}^2}{\sigma^2} + \frac{3}{2} + \frac{\bar{u}_{\text{bias}}^2}{\sigma^2} - 4 \frac{\hat{u}_1}{\sigma} \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\hat{u}_1^4}{\sigma^4} - \frac{4}{3} \frac{\hat{u}_1^3}{\sigma^3} \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\sigma} \right) \quad (42)$$

$$A_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\sigma^4}{\bar{u}^4} \left( 3 \frac{\hat{u}_2^2}{\sigma^2} + \frac{\hat{u}_2^2}{\sigma^2} \frac{\bar{u}_{\text{bias}}^2}{\sigma^2} + \frac{3}{2} + \frac{\bar{u}_{\text{bias}}^2}{\sigma^2} - 4 \frac{\hat{u}_2}{\sigma} \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\hat{u}_2^4}{\sigma^4} - \frac{4}{3} \frac{\hat{u}_2^3}{\sigma^3} \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\sigma} \right) \quad (43)$$

$$B_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma^4}{\bar{u}^4} \left( \frac{5}{2} \frac{\hat{u}_1}{\sigma} + \frac{\hat{u}_1}{\sigma} \frac{\bar{u}_{\text{bias}}^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{\hat{u}_1^3}{\sigma^3} - \frac{8}{3} \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\sigma} - \frac{4}{3} \frac{\hat{u}_1^2}{\sigma^2} \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\sigma} \right) \quad (44)$$

$$B_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma^4}{\bar{u}^4} \left( \frac{5}{2} \frac{\hat{u}_2}{\sigma} + \frac{\hat{u}_2}{\sigma} \frac{\bar{u}_{\text{bias}}^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{\hat{u}_2^3}{\sigma^3} - \frac{8}{3} \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\sigma} - \frac{4}{3} \frac{\hat{u}_2^2}{\sigma^2} \frac{\bar{u}_{\text{bias}}}{\sigma} \right) \quad (45)$$

Für den Mittelwert  $\bar{u}_{\text{bias}}$  gilt Gl. (33). Abb. 5 zeigt die Rechenergebnisse.

#### Sonderfall 1:

Für positive Scherströmungen ( $\hat{u}_1 \geq 0$  und  $\hat{u}_2 > 0$ ) mit sehr niedriger Turbulenzintensität erhält man unter der Berücksichtigung der Gl. (34) und (35)

$$\frac{\overline{u'^2_{\text{app,bias}}}}{\bar{u}^2} = A_2 - A_1 = \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \frac{(\Delta\hat{u})^2}{\bar{u}^2} - \frac{\sigma^2}{\bar{u}^2} \right)^2 \quad (46)$$

Sie ist gleich der Gl. (16). Somit gelten auch alle Berechnungen von Gl. (13) bis Gl. (16).

In Abb. 5 sind die Kurven nach Gl. (46) ebenfalls dargestellt, jedoch nur für  $\Delta\hat{u}/\bar{u} \leq 2$ , die sich aus  $\hat{u}_1 \geq 0$  und  $\hat{u}_2 > 0$  ergibt. Für die Scherströmung mit  $\Delta\hat{u}/\bar{u} \ll 1$  vereinfacht sich Gl. (46) entsprechend weiter.



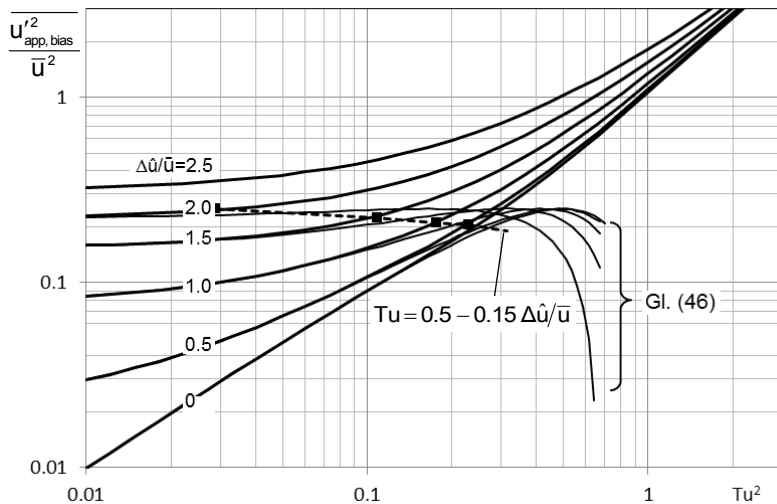


Abb. 5: Normierte scheinbare und bias-behaftete turbulente Normalspannungen aus Messungen von turbulenten Scherströmungen

### Sonderfall 2: $\Delta\hat{u}/\bar{u} = 0$

Es gilt  $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \bar{u}$ . Aus Gl. (41) kann die entsprechende Vereinfachung jedoch nicht ohne weiteres gemacht werden. An dieser Stelle werden die Berechnungen in Zhang 2002 und 2010b für reine turbulente Strömungen direkt verwendet:

$$\frac{1}{k_\sigma \sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-\frac{\bar{u}^2}{2\sigma^2}} + \frac{\bar{u}}{\sigma} \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (47)$$

$$\frac{u'_{bias}^2}{\bar{u}^2} = 2 \frac{\sigma^2}{\bar{u}^2} - \frac{\sigma^2}{\bar{u}^2} (k_\sigma \sigma)^2 \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right]^2 - k_\sigma \sigma \frac{\sigma}{\bar{u}} \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (48)$$

Diese Gleichung ist ebenfalls in Abb. 5 durch die Kurve  $\Delta\hat{u}/\bar{u} = 0$  dargestellt worden.

### Zusammenfassung

Die Messungen von Scherströmungen mit hohen Schergefällen und hoher Turbulenzintensität im Bereich des LDA-Messvolumens stehen unter dem kombinierten Bias-Effekt. Um die damit verbundenen Messfehler abschätzen zu können, sind Berechnungen basierend auf den Mechanismus des kombinierten Bias-Effekts durchgeführt worden. Zum einen konnten die Rechenergebnisse in Zhang 2010a für turbulenzarme Scherströmungen numerisch validiert werden. Dabei ist nochmals bestätigt worden, dass der arithmetische Mittelwert der Geschwindigkeit unter dem Bias-Effekt gleich der mittleren Geschwindigkeit für die Impulsstromdichte ist. Zum zweiten sind die Methoden auf die Messung von Scherströmungen mit hohen Schergefällen und hoher Turbulenzintensität erweitert worden. Die Rechenergebnisse als Referenzen dienen den LDA-Anwendern zur Beurteilung der Messgenauigkeit sowie zur Korrektur der Messergebnisse in solchen Anwendungen.

### Literatur

- McLaughlin, D., Tiederman, W., 1973: "Biasing correction for individual realization of laser anemometer measurements in turbulent flows", Phys. of Fluids, Vol. 16, No. 12, p2082-2088
- Nobach, H., 1998: „Verarbeitung stochastisch abgetasteter Signale - Anwendung in der Laser-Doppler-Anemometrie“, Diss., Univ. Rostock, Shaker Verlag, Aachen
- Zhang, Zh., 2002: "Velocity bias in LDA measurements and its dependence on the flow turbulence", J. Flow Measurement and Instrumentation 13, p63-68
- Zhang, Zh., 2010a: „Kombinierter Bias-Effekt in LDA-Messungen von Strömungen mit örtlichen Geschwindigkeitsgradienten“, 18. GALA-Tagung, Cottbus, Deutschland
- Zhang, Zh., 2010b: „LDA Application Methods“, Springer Verlag, Heidelberg, 2010