

Numerische Simulation des Sedimenttransports im Modellmaßstab

Numerical Simulation of Sediment Transport in Laboratory Scale

T. Rückborn, P. Menzel, A. Leder

Universität Rostock, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Albert-Einstein-Straße 2, 18051 Rostock

Simulation, Sedimenttransport, Kolkung, OpenFOAM, DES, instationär, Neuvernetzung
simulation, sediment transport, scour, OpenFOAM, DES, unsteady, remeshing

Zusammenfassung

Die Vorhersage von Sedimenttransportvorgängen im Nahfeld von beliebigen Objekten am Meeresboden gehört zu einem immer wichtiger werdenden Bestandteil des Küstenschutzes und dient der Vermeidung von Unfällen. Dazu zählt beispielsweise die korrekte Dimensionierung von Offshore-Fundamenten oder das sichere Aufspüren von zurückgelassenen Abfällen wie Giftmüllfässern. Durch die Kenntnis der Bodenmorphologie im Umfeld solcher Objekte ließen sich diese sicherer dimensionieren bzw. mit Hilfe eines Sidescanars leichter aufspüren.

Am Lehrstuhl für Strömungsmechanik wurden mit laseroptischer Messtechnik die Strömungs- sowie Versandungsstrukturen um einen endlichen, auf einem Sedimentbett lagernden Zylinderabschnitts experimentell ermittelt. Es wurde eine räumlich und zeitlich hoch auflösende Detached-Eddy-Simulation (DES) durchgeführt, die durch das Experiment validiert werden konnte. Weiterhin wurde eine geringer auflösende Simulation mit integriertem Sedimenttransportmodell durchgeführt. Mit Hilfe des Modells konnte eine zeitliche Auflösung der vertikalen Bodenverschiebung sowie eine Freilegung beliebiger Strukturen realisiert werden.

Einleitung

Schon frühere Untersuchungen hatten das Bestreben, den Sedimenttransport um beliebige Objekte mit numerischen Methoden darstellen zu können (Rückborn et al. 2013). Dies würde eine Optimierung von durch Auskolkungsprozesse bedrohten Strukturen hinsichtlich ihrer Stabilität ermöglichen. Eine weitere Anwendungsmöglichkeit stellt das Ermitteln von Versandungsstrukturen um verloren gegangene Objekte dar. Mit der Kenntnis der Beschaffenheit dieser Strukturen ließen sich diese Objekte über ein gewöhnliches Sidescanar leichter aufspüren. Einen entscheidenden Beitrag zum Sedimenttransport stellen die vorhandenen Strömungsstrukturen im Nahfeld stumpfer Körper dar. Diese korrekt zu ermitteln, brachte in der Vergangenheit Probleme mit sich. Im Gegensatz zu vergangenen Simulationen soll eine alternative Turbulenzmodellierung erprobt werden. Ziel soll es letztendlich sein, die Umströmung und Versandung eines um 10 % im Boden eingesunkenen Zylinders numerisch in einem angemessenen Zeitrahmen darstellen zu können. Für die Validierung werden experimentell gewonnene Daten, die durch laseroptische Untersuchungen mittels PIV-Verfahren gewonnen wurden, herangezogen.

Turbulenzmodellierung

Für alle hier beschriebenen Simulationen wurde die Turbulenzmodellierung nach Spalart und Allmaras verwendet (Spalart & Allmaras 1992). Dieses Turbulenzmodell benötigt zur Schließung des Boussinesq-Ansatzes nur eine zusätzliche Gleichung. Die Berechnungen wurden unter Verwendung einer *Detached Eddy Simulation* (DES) durchgeführt. Eine DES kann als Hybrid aus

einer Reynolds Averaged Navier Stokes Simulation (RANS) und einer Large Eddy Simulation (LES) angesehen werden. Bei einer RANS werden diejenigen Wirbel, die die Turbulenz abbilden, modelliert. Bei einer LES hingegen werden alle Wirbel, die durch die Gitterdiskretisierung aufgelöst werden können, simuliert und nur die kleinskaligen Wirbel modelliert. Die Qualität der Simulation ist also stark abhängig von der Auflösung des Rechengitters. Folglich muss eine hohe Auflösung in Wandnähe gewährleistet werden. Eine DES verfolgt daher die Strategie, wandnahe Wirbel wie bei einer RANS zu modellieren, um die Gitterauflösung gering halten zu können. Abgelöste Wirbel hingegen sollen dann wieder wie bei einer LES simuliert werden. Der Übergang zwischen diesen beiden Simulationsansätzen erfolgt fließend (Fröhlich 2006). Die DES beinhaltet eine instationäre Berechnung.

Die Komplexität der Randbedingungen einer DES nach Spalart und Allmaras ist recht übersichtlich. Neben den allgemein notwendigen Strömungsgrößen wie Geschwindigkeit U , Druck p sowie der turbulenten Viskosität ν_t , wird eine zusätzliche Hilfsgröße $\tilde{\nu}$ definiert, welche ähnlich der turbulenten Viskosität ist und eine weitere Größe zur Turbulenzmodellierung darstellt. Es gibt nur in Wandnähe Abweichungen zwischen diesen beiden Größen. Für die Randbedingungen am Einlass gilt idealerweise $\tilde{\nu} = 0$, allerdings würde dies zu numerischen Instabilitäten führen. Es ist daher günstiger $\tilde{\nu} \leq \nu/2$ zu wählen. Die Startwerte im Strömungsfeld können das Fünffache der Fluidviskosität ν betragen.

Hochauflösende Simulation

Eine essentielle Aufgabe war zunächst die korrekte Simulation der Strömungsstrukturen um einen quer zur Strömung auf einer Endscheibe liegenden endlichen Zylinder. Um eine Validierung durchführen zu können, wurden am Lehrstuhl für Strömungsmechanik umfangreiche Experimente im Windkanal durchgeführt (siehe auch Menzel & Leder 2013). So konnten beispielsweise prägnante Strukturen, wie ein Hufeisenwirbel vor dem Objekt und ein Bogenwirbel hinter dem Objekt, nachgewiesen werden.

Wie schon erwähnt, wurde die Simulation mittels einer DES in OpenFOAM durchgeführt. Die Reynoldszahl beträgt, wie im auch Windkanalexperiment, $1,5 \cdot 10^5$. Die Zellanzahl beträgt etwa 15 Mio. Zellen. Der dimensionslose Wandabstand beträgt im Mittel $y^+ \approx 2$. Die Simulation wurde auf einem Rechencluster mit 96 Prozessoren durchgeführt. Da die experimentell gewonnenen Daten über einen Mittelungszeitraum von 2 s vorliegen, ist für einen Vergleich auch bei der DES eine zeitliche Mittelung vonnöten. Trotz der hohen Prozessoranzahl konnte innerhalb einer

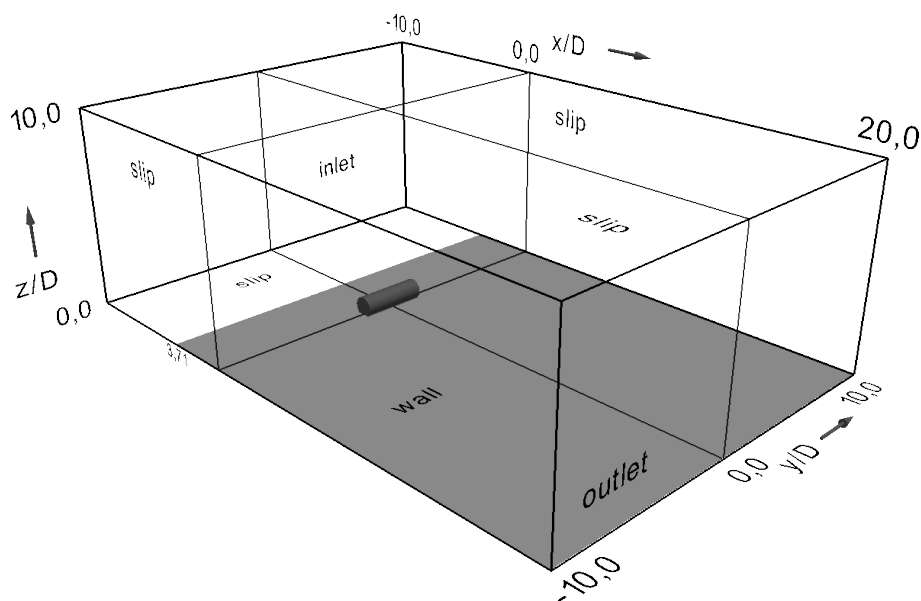


Abb. 1: Rechendomäne der hochauflösenden Simulation

Rechenzeit von acht Wochen nur eine zeitliche Mittelung über 0,25 s realisiert werden.

Abb. 1 zeigt das Rechengebiet der hochauflösenden Simulation. Die Abstände zwischen den Grenzen der Domäne und dem Objekt wurden ausreichend groß gewählt, um Randeinflüsse ausschließen zu können. Die seitlichen und oberen Begrenzungen wurden aus Gründen der numerischen Stabilität mit einer Slip-Randbedingung belegt. Das bedeutet, dass durch diese Grenzen das Fluid weder heraus noch herein strömen kann. Diese Randbedingung verhält sich somit wie eine Wand ohne Wandhaftung. Der in Abb. 1 eingefärbte Bereich stellt die Bodenplatte dar, die, wie auch im Experiment, 3,71 Zylinderdurchmesser stromauf beginnt. Um den Abstand bis zum Einlass zu überbrücken, wurde für die restliche Strecke ebenfalls eine Slip-Randbedingung gewählt. Das Berechnungsgitter selbst wurde mit dem automatischen Vernetzungstool *snappyHexMesh*, welches in OpenFOAM integriert ist, erstellt.

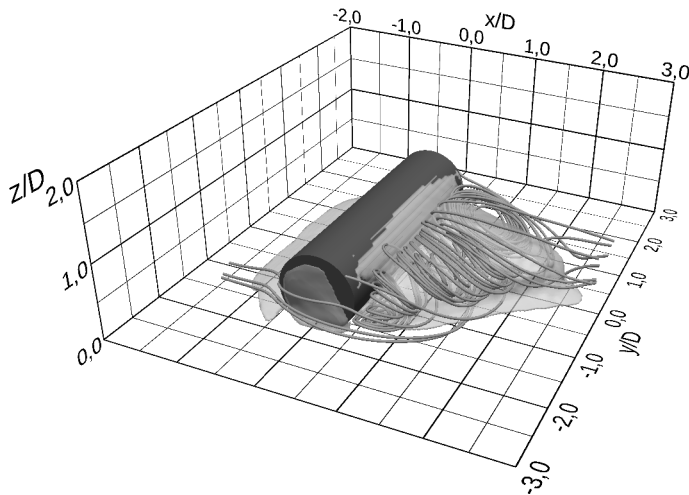


Abb. 2: Rezirkulationsgebiet mit Bogenwirbel

Abb. 2 zeigt das eingefärbte Rezirkulationsgebiet mit dem durch Stromlinien dargestellten typischen Bogenwirbel im Nachlauf des Zylinders. Der Wiederanlesepunkt der Rezirkulation ist, wie auch im Experiment, bei $x/D \approx 2,5$ wiederzufinden. Aufgrund des geringen Simulationszeitraums kann der Bogenwirbel durch das Q-Kriterium in Abb. 3 nur in geringer Ausprägung dargestellt werden. Auffällig hingegen ist der stark ausgeprägte Hufeisenwirbel, der sich im Vorlauf bildet und sich um das Objekt herumzieht. Dieses Phänomen ist auch bei anderen Objektgeometrien, die auf einer Bodenplatte angebracht wurden, zu beobachten (Hussein & Martinuzzi 1996).

Die in Abb. 4 dargestellte Wirbelstärke ermöglicht eine bessere Lokalisierung des Hufeisenwirbels. Die Lage des Wirbelzentrums im Experiment wurde mit $x/D = -0,72$ sowie $z/D = 0,19$ und in der numerischen Simulation mit $x/D = -0,68$ sowie $z/D = 0,17$ bestimmt. Die Positionen des Wirbelzentrums sind daher nahezu identisch. Auch wenn sich die absoluten Beträge der Wirbelstärke quantitativ unterscheiden, ist der Verlauf vergleichbar.

Ein Vergleich der absoluten Wandschubspannung ist mit der im Experiment verwendeten Messtechnik nur bedingt möglich. Die Wandschubspannung ist wie folgt definiert:

$$\tau_w = \tau(z=0) = \mu \left. \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (i = x, y) \quad (1)$$

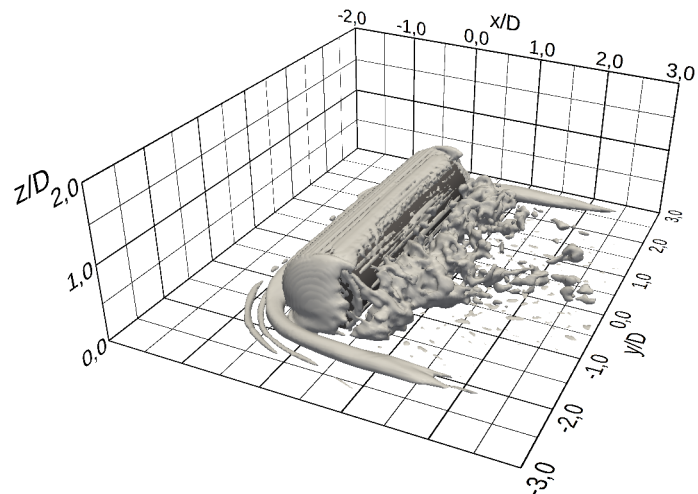


Abb. 3: Darstellung des Q-Kriteriums

Die in Abb. 4 dargestellte Wirbelstärke ermöglicht eine bessere Lokalisierung des Hufeisenwirbels. Die Lage des Wirbelzentrums im Experiment wurde mit $x/D = -0,72$ sowie $z/D = 0,19$ und in der numerischen Simulation mit $x/D = -0,68$ sowie $z/D = 0,17$ bestimmt. Die Positionen des Wirbelzentrums sind daher nahezu identisch. Auch wenn sich die absoluten Beträge der Wirbelstärke quantitativ unterscheiden, ist der Verlauf vergleichbar.

Ein Vergleich der absoluten Wandschubspannung ist mit der im Experiment verwendeten Messtechnik nur bedingt möglich. Die Wandschubspannung ist wie folgt definiert:

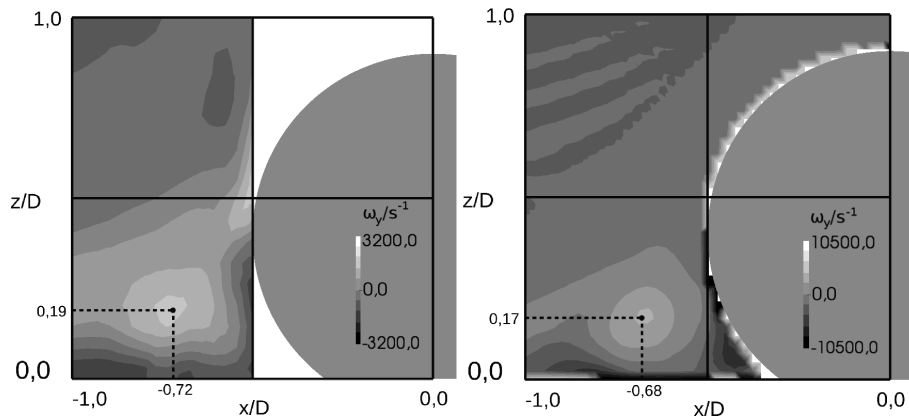


Abb. 4: Position der Hufeisenwirbel bei $y/D = 0$ visualisiert durch Wirbelstärke, links: Experiment, rechts: Numerik

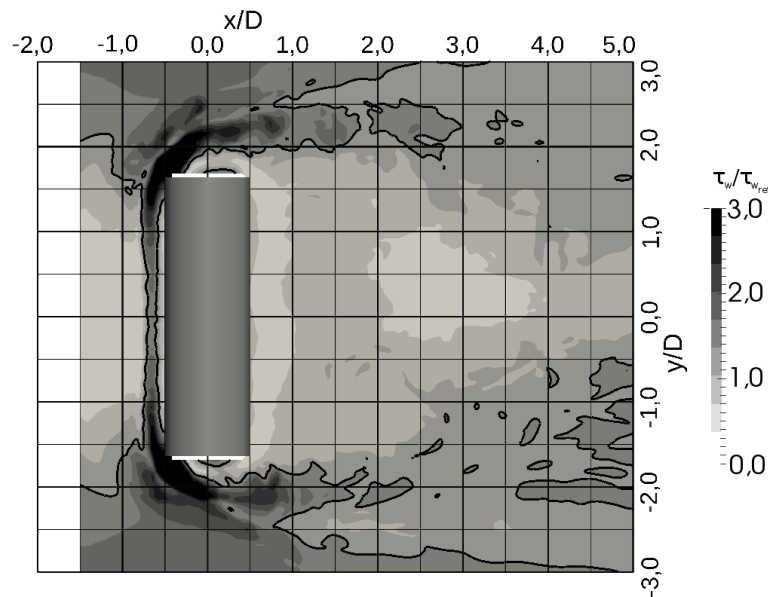


Abb. 5: numerisch ermittelte Wandschubspannung im Nahbereich des Zylinders

Das bedeutet, dass zur Bestimmung der Wandschubspannung der Geschwindigkeitsverlauf direkt oberhalb der Wand bekannt sein muss. Mittels der im Experiment verwendeten PIV kann aber nur bis wenige Millimeter oberhalb der Oberfläche gemessen werden. Auch die Numerik hat nur eine begrenzte diskrete Auflösung nahe der Wand. Um hier eine genaue Bestimmung der Wandschubspannung vornehmen zu können, ist es wichtig die viskose Unterschicht der Grenzschicht aufzulösen. In diesem Bereich ist das Geschwindigkeitsprofil linear und somit eine Bestimmung der Wandschubspannung auch anhand von diskreten Punkten möglich. Ohne weiter auf den Begriff des dimensionslosen Wandabstandes y^+ einzugehen gilt, dass diese viskose Unterschicht bei $y^+ < 5$ zu finden ist (Schlichting & Gersten 2006). Da in dieser Simulation die y^+ -Werte im Mittel etwa 2 betragen, kann davon ausgegangen werden, dass die Wandschubspannung aus dem Geschwindigkeitsfeld korrekt abgeleitet werden kann. Im Experiment hingegen konnte lediglich der wandnächste Messwert genommen werden, der außerhalb der viskosen Unterschicht liegt. Auf einen direkten Vergleich wird daher verzichtet.

Allerdings zeigt die numerische Simulation in Abb. 5 qualitativ die gleichen Wandschubspannungsverläufe wie sie im Experiment zu finden sind. Hierbei wird die ermittelte Wandschubspannung auf diejenige Wandschubspannung bezogen, die im ungestörten Bereich, d.h. ohne Objekt, aufträte. Die schwarze Linie begrenzt Bereiche, in denen die Wandschubspannung über den Normalwert hinaus erhöht bzw. verringert wurde. Wie auch im Experiment gibt es im Nach-

lauf des Zylinders ein großes Gebiet mit reduzierter Wandschubspannung. Wie zu erwarten war, ist die Wandschubspannung an den Zylinderenden stark erhöht. Weiterhin weist der gesamte Bereich des Hufeisenwirbels eine erhöhte Wandschubspannung auf. Diese Beobachtung deckt sich auch mit den Erkenntnissen, die aus den Versandungsexperimenten gewonnen wurden. Demnach führt eine hohe Wandschubspannung zur Erosion und falls es eine positive Sedimenttransportrate in ein Gebiet mit geringer Wandschubspannung hinein gibt, kommt es dort zur Akkumulation von Sediment (Menzel & Leder 2013).

Grob-Simulation

Um die Rechenzeit zu reduzieren, wurde eine konsequente Zelleinsparung und Verkleinerung der Rechendomäne durchgeführt. Dadurch erhöht sich der Anteil der modellierten gegenüber dem der berechneten Wirbelstrukturen. Wie schon erwähnt, findet dieser Übergang jedoch

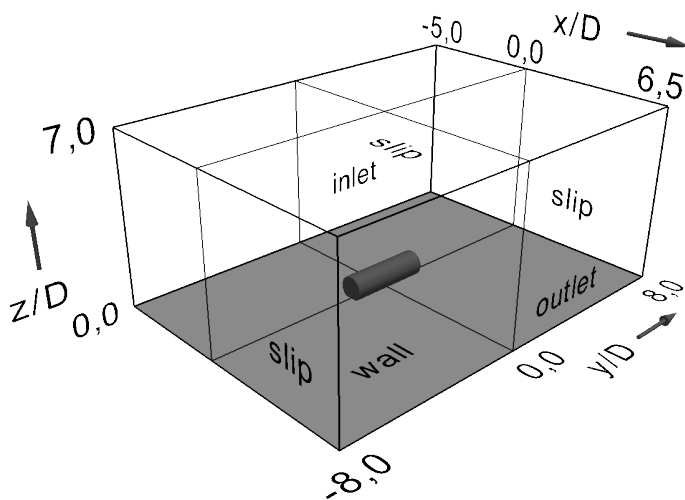


Abb. 6: Domäne der Grob-Simulation

fließend statt. Das Rechengebiet wurde anhand der gewonnenen Erkenntnisse der hochauflösenden Simulation verkleinert. Das Objekt kann die Strömungsgeschwindigkeit bis zu einer gewissen Entfernung in alle Raumrichtungen beeinflussen. Es wurde festgelegt, dass eine Veränderung der Strömungsgeschwindigkeit von 1% als vernachlässigbar angenommen werden kann. Somit werden all diejenigen Bereiche über, vor und seitlich des Objektes entfernt, in denen die einzelnen Komponenten der lokalen Strömungsgeschwindigkeit u, v , und w nur eine relative Abweichung von bis zu 1% gegenüber der Strömungsgeschwindigkeit eines ungestörten Bereiches aufweisen.

Der Abstand vom Objekt zum Auslass wurde groß genug gewählt, um die Strömungsphänomene im Nachlauf vollständig darstellen zu können. Die Begrenzungsflächen (inlet, outlet, slip) werden trotzdem als ebene Flächen dargestellt. Das Rechengebiet konnte somit auf die Größe reduziert werden, die in Abb. 6 dargestellt ist. Die Zellanzahl wurde auf ein Minimum von 60 000 reduziert. Dies führt dazu, dass die Wandgrenzschicht nicht mehr aufgelöst werden kann und vollständig modelliert wird. Die y^+ -Werte liegen daher bei einem Wert von 60 bis 200.

Die hier dargestellten Ergebnisse sind Mittelwerte über 2s einer instationären Rechnung. Aufgrund der massiven Zelleinsparung konnte diese Rechnung auf nur einem Prozessor innerhalb von 48h durchgeführt werden. Damit ist die Grob-Simulation etwa 20 000-mal schneller als die hochauflösende Simulation. Wie schon Abb. 2 der hochauflösenden Simulation zeigt auch Abb. 7 das Rezirkulationsge-

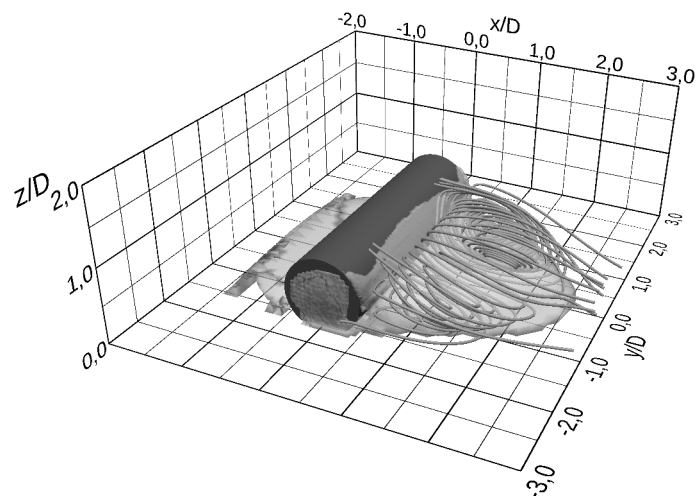


Abb. 7: Rezirkulationsgebiet mit Bogenwirbel der Grob-Simulation

biet mit dem typischen Bogenwirbel im Nachlauf. Der Wiederanlegepunkt ist hier ebenfalls bei $x/D \approx 2,5$ wiederzufinden. Trotz der geringen Zellanzahl können die Strömungsstrukturen hinreichend genau dargestellt werden. Die Wandschubspannung hingegen kann nur bedingt bestimmt werden. Aufgrund der geringen Wandauflösung wird die viskose Unterschicht vollständig modelliert. Für die Bestimmung der Wandschubspannung wird die turbulente Viskosität ν_t auf die Fluidviskosität ν aufaddiert. Somit gehen in die Bestimmung der Wandschubspannung direkt Modellierungsgrößen mit ein.

Abb. 8 zeigt die so berechnete Wandschubspannung der Grob-Simulation. Die Referenzschubspannung hat den gleichen Betrag wie in Abb. 5 der hochauflösenden Simulation, weshalb beide Darstellungen direkt miteinander vergleichbar sind. Trotz der teilweise sehr hohen y^+ -Werte am Boden, ist der Wert der maximalen Wandschubspannung nur 16% kleiner als in der hochauflösenden Simulation. Die Gebiete hoher und niedriger Wandschubspannung sind vergleichbar, wenn auch der absolute Betrag geringer ausfällt. Durch eine Absenkung der y^+ -Werte wird dieser Fehler allerdings kleiner.

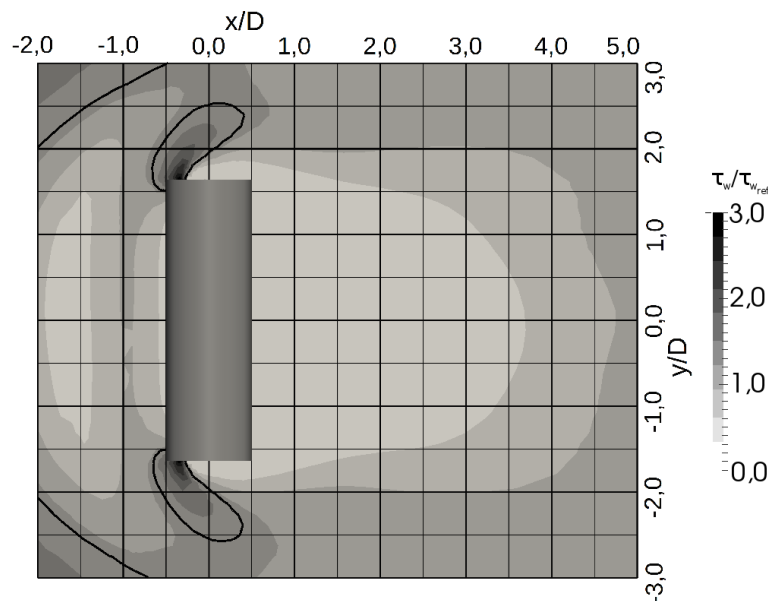


Abb. 8: Wandschubspannung im Nahbereich des Zylinders der Grob-Simulation

Sedimenttransport

Die korrekte Darstellung der Strömungsstrukturen ermöglicht nun die Anwendung eines Sedimenttransportmodells. Für erste Tests soll zunächst ein einfaches Modell verwendet werden. Die Bestimmung der Bodenfracht-Sedimenttransportrate q_s erfolgt nach dem Modell von Meyer-Peter und Müller (1948).

$$q_s = \sqrt{(s-1)gd_{50}^3} \cdot \left(\frac{4\tau_w}{\rho_f(s-1)gd_{50}} - \tau_c \right)^{3/2} \quad s = \frac{\rho_s}{\rho_f} \quad (2)$$

$$s = \frac{\rho_s}{\rho_f} \quad (3)$$

Hierbei wird die Dichte des Sediments ρ_s und die Dichte des Fluids ρ_f benötigt. Die Gravitationsbeschleunigung wird mit g angegeben. Das Sediment weist eine konstante mittlere Korngröße von d_{50} auf. Die kritische Wandschubspannung wird zunächst mit $\tau_c = 0,0001$ Pa angenommen. Die so ermittelte Sedimenttransportrate gilt nur für einen Bodenfrachttransport. Ein Sedimenttransport innerhalb einer Suspension wird nicht berücksichtigt. D. h. es wird lediglich die rollende und springende Bewegung von Sandpartikeln am Boden simuliert. Mit Hilfe der

Exner-Gleichung

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot q_s \quad (4)$$

kann die vertikale Bodenverschiebung h über die Zeit bestimmt werden. Die Packungsdichte des Sediments wurde mit $\varepsilon = 0,64$ festgelegt, was einer auf natürliche Weise entstandenen dichten Packung entspricht (Song et al. 2008).

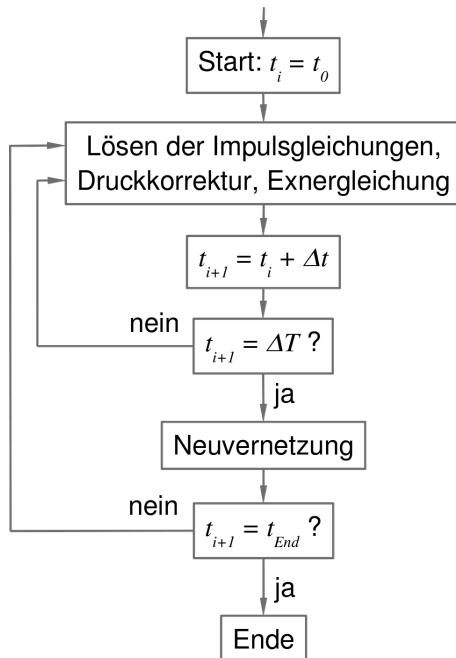


Abb. 9: Lösungsstrategie für das Sedimenttransportmodell

Die Lösung der Gleichungen wurde vollständig in OpenFOAM eingebettet und ist parallelisierbar. Abb. 9 zeigt die derzeitige Strategie für die Lösung eines Versandungsproblems. Durch die zeitaufgelöste Simulation der Strömungsstrukturen ist es sinnvoll, auch die Versandungsstrukturen instationär zu berechnen. Dazu wird parallel zur Berechnung der Impulsgleichung und der Druckkorrektur die Wandschubspannung am Boden bestimmt und über weitere Berechnungen die Exnergleichung gelöst. Nun liegt für diesen Zeitschritt die Bodenverschiebung h vor. Um die Rechenzeit für eine Neuvernetzung zu reduzieren, findet diese jedoch nur alle ΔT Zeitschritte statt. Hierzu wird die Verschiebung über eine bestimmte Anzahl Zeitschritte $n \cdot \Delta t$ aufsummiert. Die Zeitschrittweite ΔT sollte so gewählt werden, dass die Verschiebung h nicht größer wird als die bodennächste Zellschichtdicke. Die Neuvernetzung wird automatisch mittels *snappyHexMesh* durchgeführt. Aufgrund der Neuvernetzung ist es nun möglich Objektstrukturen, die einst von Sediment bedeckt waren, durch Kolkungsprozesse freizulegen.

Mit dem derzeitigen Stand der Modellierung ist es möglich, erste Ansätze von Bodenfracht-Sedimenttransport numerisch darzustellen. Dazu wurden die Randbedingungen des Wasserkanalexperiments von Menzel und Leder (2013) etwas angepasst. Um die Wirksamkeit der Strukturfreilegung überprüfen zu können, wurde der Zylinder um 25 % vorversandet. Die Reynoldszahl ist gegenüber dem Windkanalexperiment nun eine Größenordnung kleiner und beträgt wie im Wasserkanalexperiment $Re = 1,7 \cdot 10^4$. Es wurde das Rechenetz der vorher erwähnten Grob-Simulation genutzt. Die geringere Reynoldszahl lässt die y^+ -Werte nun auf etwa 15 sinken, wodurch in der Berechnung der Wandschubspannung der Modellierungseinfluss sinkt. Die Rechnung wurde auf einem Prozessor durchgeführt. Mit dieser Konfiguration wird zur Simulation von 1 min Modellzeit eine Rechenzeit von etwa 24 h benötigt.

Abb. 10 zeigt einen ersten Versuch der Versandung nach 20 s Modellzeit. Die vertikale Verschiebung h ist eingefärbt dargestellt. Die weiße Konturlinie am Zylinder zeigt das ursprüngliche Nullniveau. Es ist zu erkennen, dass die Erosion ausgeprägter in Erscheinung tritt als die Akkumulation. Ein möglicher Grund wäre die noch fehlende Berücksichtigung des Sedimenttransports innerhalb einer Suspension. Die Böschungswinkel der Kolkungslöcher fallen sehr flach aus. Die größten Erosionsgebiete sind, wie auch im Experiment, vor und besonders seitlich des Zylinders zu finden.

Zusammenfassung und Ausblick

Die automatische Vernetzung mittels *snappyHexMesh* hat sich als praktikabel herausgestellt. Mittels einer hochauflösenden DES ist es möglich das Rezirkulationsgebiet im Nachlauf sowie den Hufeisenwirbel vor dem Objekt korrekt darstellen zu können. Durch eine konsequente

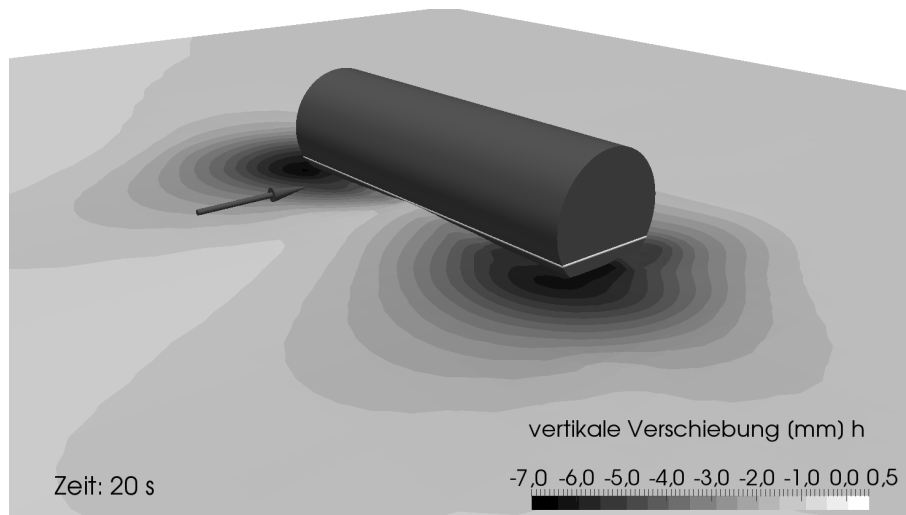


Abb. 10: Bodenverschiebung

Zelleinsparung konnte diese Simulation stark beschleunigt werden. Es wurde ein Sedimenttransportmodell entwickelt, das es ermöglicht, mittels Neuvernetzung Objektgeometrien durch Kolkprozesse freizulegen. Die Versandungsexperimente sind qualitativ in einem angemessenen Zeitraum reproduzierbar. Im folgenden Projektzeitraum ist eine detailliertere Validierung der Grob-Simulation notwendig. Weiterhin soll der Versandungsalgorithmus weiterentwickelt werden. Hierbei soll zunächst ein komplexeres Versandungsmodell implementiert werden. Zu fortgeschrittener Zeit ist die Berücksichtigung von Suspension geplant. Denkbar ist auch die Simulation von Objektbewegungen infolge von Kolkungsprozessen.

Danksagung

Dieses Forschungsvorhaben wird unterstützt durch eine Zuwendung der Bundesrepublik Deutschland, vertreten durch die Wehrtechnische Dienststelle für Schiffe und Marinewaffen, Maritime Technologie und Forschung (WTD 71) in Eckernförde. Weitere Unterstützung wird durch die International Leibniz Graduate School for Gravity Waves and Turbulence in the Atmosphere and Ocean (ILWAO) mit dem Hauptsitz in Kühlungsborn geleistet. Die Autoren bedanken sich für die finanzielle Unterstützung des Forschungsprojekts.

Literatur

- Fröhlich, J., 2006: "Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen", Teubner, 1. Auflage
- Hussein, H. J., Martinuzzi, R. J., 1996: "Energy balance for turbulent flow around a surface mounted cube placed in a channel", Phys. Fluids 8 (3), pp. 764 - 780
- Menzel, P., Leder, A., 2013: "Kolkbildung im Umfeld zylindrischer Objekte sowie deren Versandung im Wasserkanalexperiment", Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik, 21. Fachtagung 2013, pp. 44-1 - 44-8
- Meyer-Peter, E., Müller, R., 1948: "Formulas for bed-load transport", Proc. Second Meeting IAHSR, Stockholm, Sweden
- Rückborn, T., Menzel, P., Leder, A., 2013: "Numerische Simulation der Umströmung eines auf Sediment aufliegenden stumpfen Körpers", Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik, 21. Fachtagung 2013, pp. 45-1 - 45-7
- Schlichting, H., Gersten K., 2006: "Grenzschichttheorie", Springer-Verlag, 10. überarbeitete Auflage
- Song, C., Wang, P., Makse, H. A., 2008: "A phase diagram for jammed matter", Nature 453, pp. 629-632
- Spalart, P. R., Allmaras, S. R., 1992: "A One-Equation Turbulence model for Aerodynamic Flows", AIAA Paper 92-0439