

## Untersuchungen des Zylindernachlaufs – Lattice-Boltzmann-Simulationen im Vergleich mit laseroptischen Messungen

### Analyzing the cylinder wake – Lattice-Boltzmann simulations in comparison with laser optical measurements

**H. Morrison, A. Wolter, P. Menzel, A. Leder**

Universität Rostock, Lehrstuhl Strömungsmechanik  
Albert-Einstein-Str. 2, 18051 Rostock

Lattice-Boltzmann-Methode, Zylindernachlauf, PIV, LDA, Validierung der Simulationsmethode  
Lattice-Boltzmann-Method, cylinder wake, PIV, LDA, validation of simulation method

#### Zusammenfassung

Im Rahmen diverser Projekte wurde in den vergangenen Jahren der Zylindernachlauf im unterkritischen Bereich ( $10^2 < Re < 10^5$ ) gründlich mittels laseroptischer Messtechnik untersucht. Zur Erweiterung der Datensätze sowie zur Gewinnung von Kenntnissen, die mittels laseroptischer Messtechnik nicht zu erzielen sind, müssen jedoch auch numerische Simulationen herangezogen werden.

Die Lattice-Boltzmann-Methode ist ein vielversprechendes Verfahren der numerischen Strömungssimulation, welches im Vergleich zu gängigen CFD-Verfahren geringere Laufzeiten ermöglicht. Außerdem können auch komplexe Geometrien, Turbulenzmodelle oder Mehrphasensysteme mit vergleichsweise geringem Aufwand eingebunden werden.

Um diese Simulationsmethode verifizieren zu können, wurde zunächst die Umströmung eines unendlichen Zylinders numerisch nachgebildet und die berechneten Strömungsstrukturen mit den durchgeführten Labormessungen verglichen. Dabei zeigte sich, dass die Lattice-Boltzmann-Methode zwar mit steigender Reynoldszahl immer mehr an ihre Grenzen stößt, die Strömungsstrukturen jedoch allgemein gut wiedergegeben werden können.

#### Motivation

Die Simulation der Zylinderumströmung stellt eine Herausforderung dar, da die Wirbelablösung von der Grenzschicht an der Zylinderoberfläche abhängt und runde Flächen bei den gängigen CFD-Verfahren schwierig zu vernetzen sind. Ferner bezieht sich die Reynoldszahl  $Re = UD/\nu$ , neben der kinematischen Viskosität  $\nu$  und der charakteristischen Geschwindigkeit  $U$ , auf den Zylinderdurchmesser  $D$  als charakteristische Länge. Da die Simulationsdomäne außerdem groß genug gewählt werden muss, um Auswirkungen der Ränder auf die Strömungsstrukturen ausschließen zu können, führt dies dazu, dass bei höheren Reynoldszahlen die benötigte Zellenanzahl sehr groß wird. Das wiederum führt zu immer längeren Laufzeiten.

Aufgrund der Natur der Lattice-Boltzmann-Methode, auf die im folgenden Kapitel näher eingegangen wird, verspricht man sich allgemein eine bessere Laufzeit bei der Simulation der

Zylinderumströmung als z.B. bei Finite-Volumen-Methoden. Um jedoch zu validieren, dass die Simulationen auch sinnvolle Ergebnisse liefern, wird im Folgenden der Zylindernachlauf bei  $Re = 500$  näher betrachtet und die Ergebnisse der Simulationen mit den Ergebnissen von entsprechenden PIV-Messungen am Kavitationstank des Lehrstuhls Strömungsmechanik der Universität Rostock verglichen.

### Theorie der Lattice-Boltzmann-Methode

Die Lattice-Boltzmann-Methode basiert auf der Annahme, dass sich die makroskopischen Eigenschaften eines Systems aus der statistischen Verteilung mikroskopischer Partikel herleiten lassen. Die Verteilungsfunktion gibt Auskunft darüber, wie viele Teilchen sich an einem bestimmten Punkt im Orts- und Geschwindigkeitsraum befinden und ist folgendermaßen definiert:

$$f(\vec{x}, \vec{u}) = \frac{dN}{d\vec{x}d\vec{u}}, \quad (1)$$

wobei  $dN$  die Anzahl der insgesamt in dem System vorhandenen Teilchen pro Volumenelement im Phasenraum ist und  $\vec{x}$  und  $\vec{u}$  jeweils der Orts- bzw. Geschwindigkeitsvektor, welche diesen Phasenraum charakterisieren. Die zeitliche Änderung dieser Verteilungsfunktion ist, bei Vernachlässigung einer von außen wirkenden Kraft, durch die Boltzmann-Gleichung gegeben:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \Omega. \quad (2)$$

Hier stehen die Indizes  $i$  für die einzelnen Komponenten des Orts- bzw. Geschwindigkeitsvektors und  $\Omega$  bezeichnet den sogenannten Kollisionsoperator, der die Auswirkung einer Kollision zwischen den Teilchen beschreibt.

Bei der Lattice-Boltzmann-Methode wird die Boltzmann-Gleichung auf einem Gitter (engl. *lattice*) diskretisiert. Dazu werden auf jedem Gitterknoten eine bestimmte Anzahl  $q$  von Verteilungsfunktionen  $f_i$  definiert. Eine davon gibt die Verteilungsfunktion an dem Gitterknoten selbst wieder, während die  $q-1$  anderen Verteilungsfunktionen Informationen über benachbarte Gitterknoten enthalten. Des Weiteren sind  $q$  Gittergeschwindigkeitsvektoren  $\vec{c}_i$  definiert. Diese sind auf dem gesamten Gitter räumlich und zeitlich konstant, da sie lediglich von der konstanten Gittergeschwindigkeit  $c$  und der jeweiligen Position des Nachbarn abhängig sind. Die Gittergeschwindigkeit ist dabei durch den konstanten Längenabstand  $\delta x$  und den Zeitschritt  $\delta t$  als  $c = \delta x / \delta t$  definiert.

Aus diesen Vorüberlegungen ergibt sich die diskretisierte Boltzmann-Gleichung zu

$$f_i(\vec{x} + \vec{c}_i \delta t, t + \delta t) - f_i(\vec{x}, t) = \Omega. \quad (3)$$

Für die Behandlung des Kollisionsoperators gibt es einige verschiedene Ansätze. Das einfachste und dennoch mitunter am häufigsten verwendete Modell ist die BGK-Approximation (Bhatnagar et al. 1954). Sie geht davon aus, dass die Verteilungsfunktion ein lokales Gleichgewicht  $f_i^{eq}$  anstrebt, welches sich nach einer Relaxationszeit  $\tau$  einstellen würde:

$$\Omega = -\frac{\delta t}{\tau} (f_i - f_i^{eq}). \quad (4)$$

Mittels der Chapman-Enskog-Entwicklung (Chapman & Cowling 1970) kann die Boltzmann-Gleichung in die Navier-Stokes-Gleichungen überführt werden, wodurch die Angabe von  $f_i^{eq}$ ,

sowie einiger weiterer Zusammenhänge ermöglicht wird. Am wichtigsten ist dabei der Ausdruck für die kinematische Viskosität, der in Code-Einheiten ( $c = \delta x = \delta t = 1$ ) folgendermaßen gegeben ist (Krafczyk 2001):

$$\nu = \frac{\tau}{3} - \frac{1}{6}. \quad (5)$$

Anhand dieser Gleichung wird deutlich, dass  $\tau > 0,5$  sein muss, um eine positive Viskosität zu ermöglichen. Praktisch hat sich gezeigt, dass die numerisch stabilsten und genauesten Lösungen bei  $\tau \approx 0,9$  ermöglicht werden können (Krüger et al. 2010).

Abschließend sei erwähnt, dass die makroskopischen Eigenschaften des Systems durch die Momente der Verteilungsfunktion gegeben sind:

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_{i=0}^{q-1} f_i(\vec{x}, t) \quad (6)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{i=0}^{q-1} \vec{c}_i f_i(\vec{x}, t) \quad (7)$$

Somit kann man also aus der Berechnung einer einzigen Variable (der Verteilungsfunktion) alle makroskopischen Eigenschaften des Systems herleiten. Dies alleine ermöglicht eine erhebliche Einsparung an Rechenzeit. Ferner ist die Lattice-Boltzmann-Methode auf Gitterknoten definiert, welche alle einen konstanten Abstand zueinander haben. Dies macht zwar die Implementierung einer lokalen Gitterverfeinerung erheblich komplexer, jedoch ist ein entscheidender Vorteil davon, dass im Vergleich zu anderen CFD-Methoden keine zeitaufwändige Netzberechnung nötig ist.

### Zylinderumströmung bei Reynoldszahl 500

Es ist bekannt, dass im Nachlauf des Zylinders bei Reynoldszahl 500 eine Kármánsche Wirbelstraße mit der Ablösefrequenz  $f$  auftritt, welche durch die Strouhalzahl

$$Sr = \frac{f \cdot D}{U} \approx 0,2 \quad (8)$$

charakterisiert wird (Zdravkovich 1997). Neben diesen Primärwirbeln sind weiterhin auch sogenannte Sekundärwirbel zu erwarten, deren Wirbelachsen in Strömungsrichtung orientiert sind (Brede et al. 1996).

### Simulationen mittels der Lattice-Boltzmann-Methode

Um eine direkte numerische Simulation (DNS) durchführen zu können, müssen alle Skalen bis zur Kolmogorov-Länge abgebildet werden können. Daraus ergibt sich, dass für die Anzahl der Zellen pro Referenzlänge  $N \geq Re^{3/4}$  gelten muss, und in diesem Fall  $N \geq 106$ . Bei einer Simulationsdomäne von  $-10 \leq x/D \leq +15$ ,  $-5 \leq y/D \leq +5$  und  $-2 \leq z/D \leq +2$  würde dies ca. 1,4 Milliarden Zellen bedeuten. Die Verwendung einer lokalen Gitterverfeinerung ist daher unverzichtbar.

Die folgende Simulation wurde mit dem quelloffenen (*open source*) CFD-Solver Palabos<sup>1</sup>, dem die Lattice-Boltzmann-Methode zu Grunde liegt, durchgeführt. Dort ist eine Gitterverfeinerung zwar implementiert, befindet sich jedoch für dreidimensionale Anwendungen noch in der

<sup>1</sup>[www.palabos.org](http://www.palabos.org)

Tab. 1: Simulationsdomäne mit dreifacher Verfeinerung

Verfeinerungsstufe	$N$	$x/D$	$y/D$	$z/D$
0	14	$-10 \leq x/D \leq +15$	$-5 \leq y/D \leq +5$	$-2 \leq z/D \leq +2$
1	28	$-5 \leq x/D \leq +10$	$-2 \leq y/D \leq +2$	$-2 \leq z/D \leq +2$
2	56	$-2 \leq x/D \leq +5$	$-1,5 \leq y/D \leq +1,5$	$-2 \leq z/D \leq +2$
3	112	$-1 \leq x/D \leq +1$	$-1 \leq y/D \leq +1$	$-2 \leq z/D \leq +2$

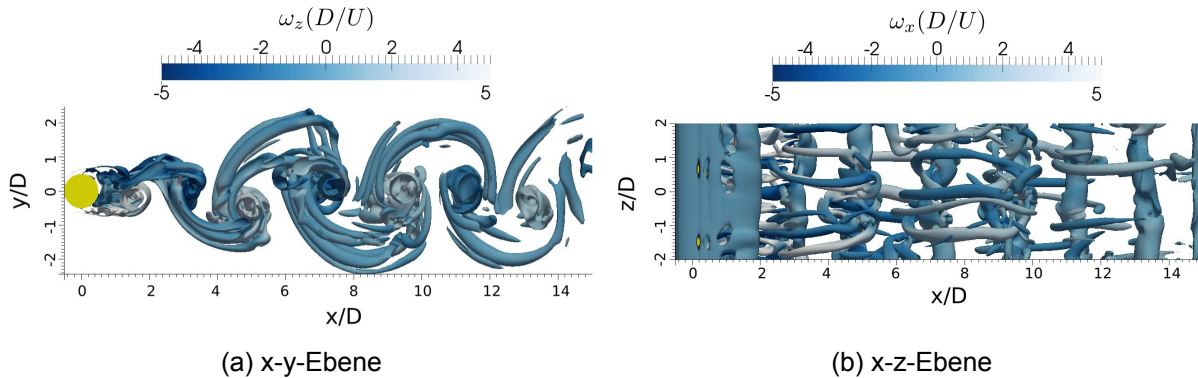


Abb. 1: Isoflächen bei  $Q = 0,5(D/U)^2$ , farbkodiert nach der z- bzw. x-Komponente der Wirbelstärke.

Entwicklung. Sie ist so implementiert, dass pro Verfeinerungsstufe  $N$  verdoppelt wird (Lagrava Sandoval de Sucre 2012). Dies führt in einer dreidimensionalen Simulation zu einer Veracht-fachung der gesamten Zellenanzahl in diesem Bereich. Für die folgende Simulation wurden drei Verfeinerungsstufen gewählt. Die Domänen der jeweiligen Stufen und deren jeweilige Auflösung sind in Tab. 1 abzulesen. Insgesamt ergeben sich daraus knapp unter 42,2 Mio. Zellen. Es sei jedoch erwähnt, dass die Domänen für die Verfeinerung aus Erfahrungswerten gewählt wurden und daher nicht zwangsläufig den Fall mit dem wenigsten Rechenaufwand darstellen.

Die Randbedingungen sind so gewählt, dass am Einlass ein Blockprofil für die Geschwindigkeit und am Auslass eine konstante Dichte vorgegeben wird, sodass die Strömungsrichtung in positive x-Richtung erfolgt. Außerdem wird am Auslass die Viskosität gedämpft, um numerische Instabilitäten zu vermeiden. In Zylinderrichtung sind die Ränder periodisch, um einen unendlichen Zylinder simulieren zu können. Die übrigen Ränder sind *freeslip*-Randbedingungen, d.h. die orthogonale Geschwindigkeitskomponente verschwindet, während die tangentielle Geschwindigkeitskomponente ihren Betrag beibehält. Der Zylinder wird mit sogenannten *bounce back*-Randbedingungen beschrieben, welche die ankommenden Verteilungsfunktionen direkt "reflektieren" und so eine feste Wand darstellen. Diese sind keine gekrümmten Ränder, d.h. der Zylinder wird stufenförmig approximiert, jedoch sind die *bounce back*-Ränder innerhalb des Codes wesentlich einfacher zu handhaben als die gekrümmten Ränder, weshalb sie für die ersten Simulationsversuche bevorzugt wurden.

Die weiteren Parameter wurden folgendermaßen gewählt:  $c = 0,05$ ,  $D = 1$  cm,  $U = 5,0$  cm/s, sodass  $\delta x_c \approx 0,07$  cm,  $\delta t_c \approx 7 \times 10^{-4}$  s und  $\tau_c \approx 0,504$ . Der Index  $c$  (=coarse) weist dabei darauf hin, dass es sich hier um die resultierenden Werte für das gröbste Gitter handelt. Für das feinste Gitter, gekennzeichnet durch den Index  $f$  (=fine), gilt dagegen:  $\delta x_f \approx 0,009$  cm,  $\delta t_f \approx 8,9 \times 10^{-5}$  s und  $\tau_f \approx 0,534$ .

Die Laufzeit für 50 s ( $\hat{=}$  70 000 Iterationen auf dem größten Gitter, bzw. 562 000 auf dem feinsten Gitter) beträgt etwas mehr als 10 Tagen auf 12 Prozessoren (Intel Xeon E5-2660 v2). Eine zeitliche Auswertung der Simulationsdaten zeigt, dass die Frequenz der

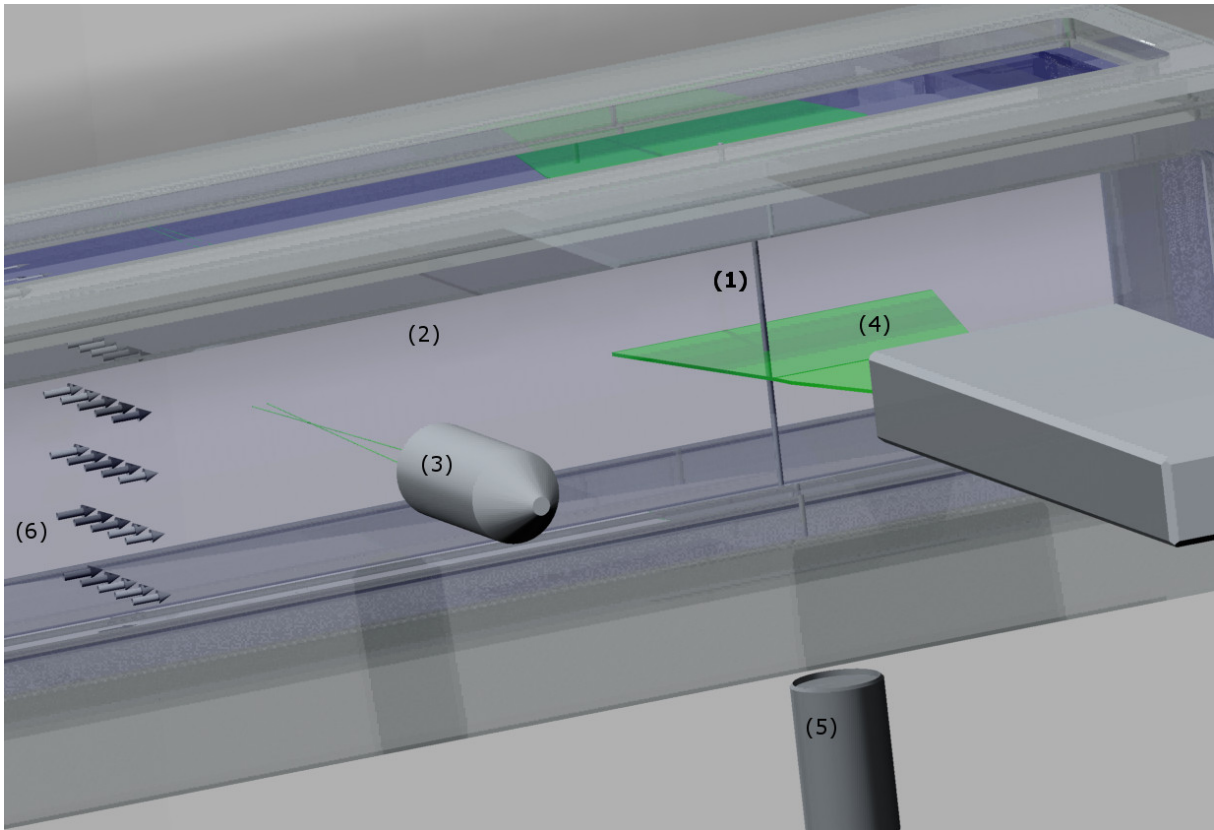


Abb. 2: Setup mit dem Zylinder (1) in der Messkammer (2) des K21, dem LDA (3) sowie dem PIV-Lichtschnitt (4) und der PIV-Kamera (5), die Pfeile (6) geben die Anströmrichtung an.

Strömungsablösung bei ca.  $f \approx 0,9$  liegt. Dies führt bei  $D = 1 \text{ cm}$  und  $U = 5,0 \text{ cm/s}$  zu einer Strouhalzahl von ca.  $St \approx 0,22$ , was gut mit der Theorie (Glg. 8) übereinstimmt.

Abb. 1 zeigt die resultierenden Wirbel nach 50 s. Sie sind gekennzeichnet durch das Q-Kriterium, welches größer Null wird, wenn die Rotation die Scherung überwiegt, und folgendermaßen definiert ist:

$$Q = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] - \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (9)$$

In Abb. 1a ist die x-y-Ebene mit Blick auf die Zylinderachse dargestellt. Hier sind die Stabwirbel der Kármánschen Wirbelstraße zu erkennen, welche mit der z-Komponente der Wirbelstärke  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$  farbkodiert sind, um den unterschiedlichen Drehsinn hervorzuheben. Weiterhin sind aber auch Wirbel sichtbar, welche die Stabwirbel miteinander zu verbinden scheinen und offenbar keinen Drehsinn in z-Richtung besitzen. Anhand von Abb. 1b wird deutlich, dass es sich hierbei um Sekundärwirbel mit Drehsinn in x-Richtung handelt, welche überhaupt erst ab dem laminar-turbulenten Übergangsbereich bei  $160 < Re < 500$  auftreten.

#### *Laseroptische Messungen am Kavitationstank*

Für die Validierung der Simulationsergebnisse wurde im Kavitationstank K21 der Universität Rostock ein Zylinder ( $D = 5 \text{ mm}$ ) quer zu Strömung eingebracht und ein Schnitt durch dessen Ablösebereich in x-y-Ebene mittels PIV vermessen, wobei die Anströmgeschwindigkeit auf  $10 \text{ cm/s}$  eingestellt wurde (Vgl. Abb. 2).

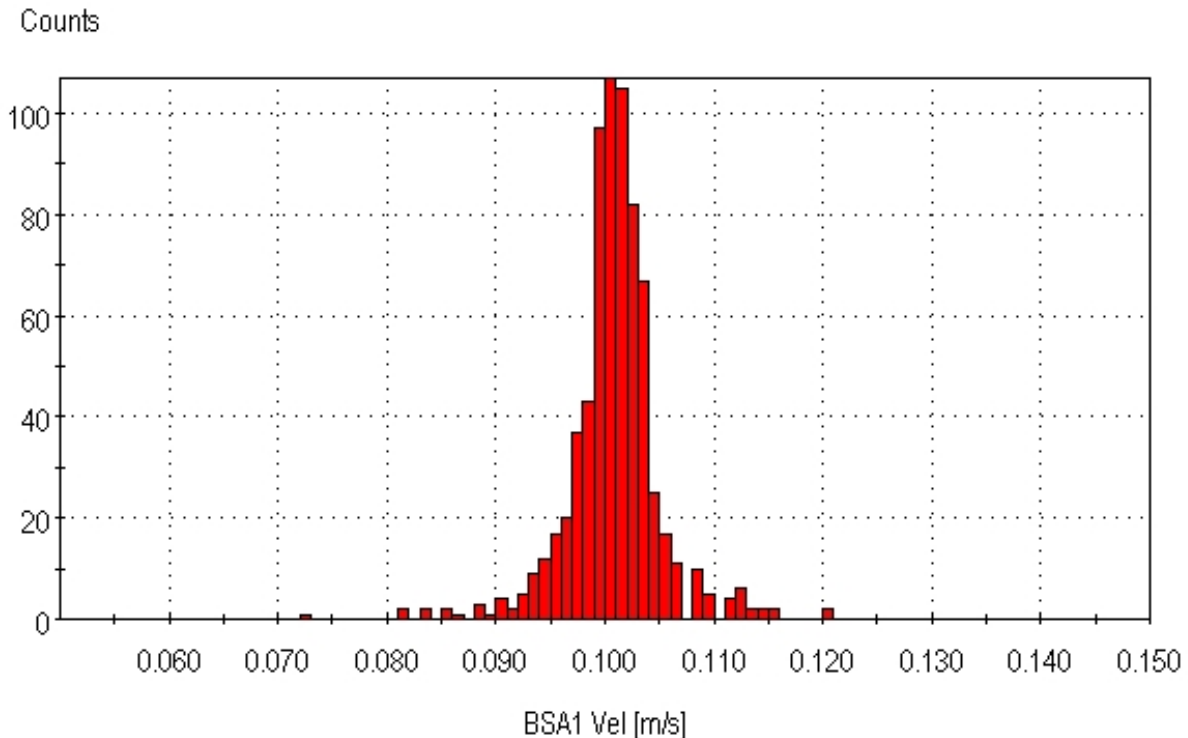


Abb. 3: Histogramm der Anströmgeschwindigkeit U.

Der K21 ist ein geschlossener Wassenumlaufkanal für Geschwindigkeiten bis 10 m/s und Systemdrücken zwischen 0,4 bis 2,0 bar. Er verfügt über eine Messstrecke von 300 mm x 300 mm Querschnitt und einer Länge von 1300 mm, wobei diese über großflächige Fenster (je 1100 mm x 200 mm) allseitig optisch zugänglich ist, wodurch gute Einsatzbedingungen für laseroptische Messverfahren bestehen (Kröger et al. 2012).

Da die Länge des Zylinders mit 290 mm erheblich größer als der Zylinderdurchmesser von 5 mm war, kann davon ausgegangen werden, dass der Nachlauf dem eines unendlichen Zylinders gleicht. Aus dem Durchmesser und der Anströmgeschwindigkeit ergibt sich nach Glg. 8, eine charakteristische Frequenz der Wirbelablösung von ca. 4 Hz und eine Reynoldszahl von 500. Als Strömungstracer für LDA und PIV wurden dem Wasser praktisch auftriebsneutrale VESTOSINT-Partikel beigemischt.

Für die Überwachung der Anströmgeschwindigkeit wurde ein LDA vom Typ DANTEC Flowlite 1D (250 mm-Optik) eingesetzt. Abb. 3 zeigt das Histogramm der Anströmgeschwindigkeit, dessen Mittelwert bei 0,1 m/s und deren Standardabweichung bei 0,04 m/s lag, was bei vorliegender Isotropie einem Turbulenzgrad  $Tu$  von 4% entspricht.

Zur PIV-Vermessung des Nachstromgebiets des in z-Richtung orientierten Zylinders wurde in Zylindermitte ( $z = 150$  mm) die x-y-Ebene mittels Doppelpulslaser (New Wave Solo 120XTPIV) bei einer Repetierfrequenz  $f_{Rep} = 15$  Hz in Form eines Laserlichtschnitts beleuchtet.

Die aus negativer z-Richtung rechtwinklig auf den Lichtschnitt blickende DANTEC-FlowSense-4M-Kamera war mit einem Makroobjektiv (VR Micro-Nikkor 105 mm /1:2,8) ausgestattet, womit eine gute Auflösung der nur 5 mm breiten Wirbelstraße erreicht werden konnte. Zur weiteren Auswertung der PIV-Daten kam der DANTEC FlowManager zum Einsatz und für die Nachbearbeitung sowie für die Visualisierung ParaView.

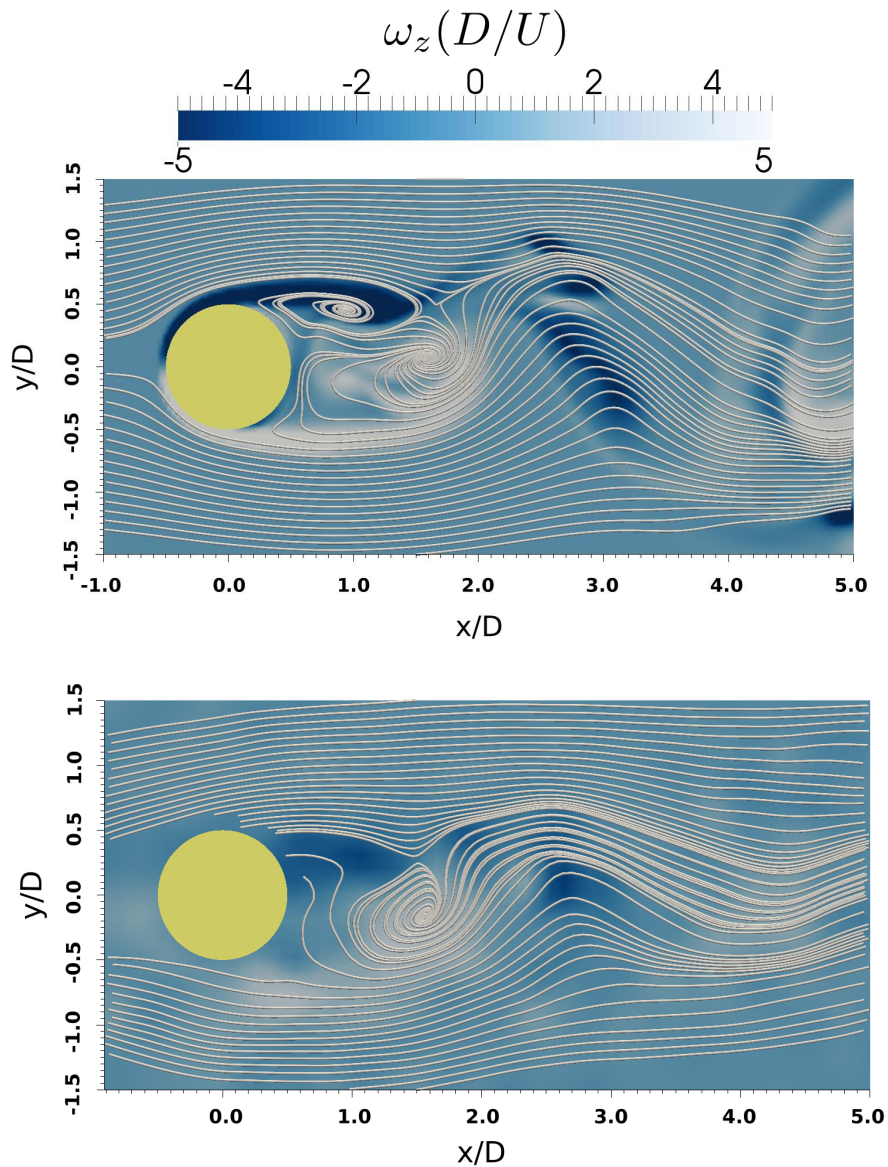


Abb. 4: Stromlinien des simulierten instationären Nachlaufs nach 70 000 Iterationen (oben) und eines Snapshots der PIV-Messungen (unten).

#### *Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den Messungen*

Abb. 4 zeigt die resultierenden z-Komponenten der Wirbelstärke sowie die Stromlinien bei einem jeweiligen Snapshot der Simulation und der PIV-Messungen. Da es sich beim Zylinder-nachlauf um einen höchst instationären Prozess handelt, welcher statistischen Schwankungen unterliegt, ist es nahezu unmöglich einen Snapshot aus den PIV-Messungen zu erhalten, der exakt mit einem Snapshot der Simulation übereinstimmt. So ist z.B. der Wirbel mit negativer Wirbelstärke, der bei der Simulation bei  $x/D \approx 1,0$  und  $y/D \approx 0,5$  auftritt, im Experiment nicht sichtbar, was höchstwahrscheinlich mit einer leicht verschobenen Phase zwischen beiden Snapshots zu erklären ist. Es ist jedoch auch möglich, dass dieser im Experiment nicht aufgelöst wurde. Ferner stimmt die Grenzschicht um den Zylinder herum nicht überein. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Grenzschicht im Experiment ebenfalls nicht aufgelöst wurde und somit in dem Bereich keine gültigen Geschwindigkeitsvektoren vorliegen.

Dennoch zeigt der Vergleich, dass die Strömungsstrukturen im Experiment und der Simulation weitestgehend übereinstimmen. Vor allem die Lage und die Stärke der Wirbel können mit der Lattice-Boltzmann-Simulation gut abgebildet werden.

## Zusammenfassung und Ausblick

Durch den Vergleich numerischer und experimenteller Daten des Zylindernachlaufs wurde gezeigt, dass die Lattice-Boltzmann-Methode allgemein die Strömungsstrukturen im Nachlauf eines unendlichen Zylinders gut abbilden kann. Außerdem zeigt der hier dargestellte Fall, dass die lokale Gitterverfeinerung in Palabos bei dreidimensionalen Gittern zufriedenstellende Ergebnisse liefert, obwohl sich diese noch in der Entwicklung befindet.

Die vorliegenden Ergebnisse bestärken das Vorhaben, nun den Zylindernachlauf bei höheren Reynoldszahlen zu simulieren. Dazu müssen weitere Kollisionsmodelle und Randbedingungen getestet werden, um die höchste numerische Stabilität zu garantieren. Des Weiteren muss dann auch die Turbulenzmodellierung mit der Gitterverfeinerung kombiniert werden, um die Anzahl der Gitterknoten und somit die Laufzeit zu beschränken.

## Dankesworte

Dieses Forschungsvorhaben wird unterstützt durch eine Zuwendung der Bundesrepublik Deutschland, vertreten durch die Wehrtechnische Dienststelle für Schiffe und Marinewaffen, Maritime Technologie und Forschung (WTD 71) in Eckernförde. Die Arbeiten wurden weiterhin unterstützt durch den Europäischen Fonds für regionale Entwicklung und das Bundesland M/V, deren Mittel der technischen Ausstattung des K21 dienen.

Ein besonderer Dank gilt den Kollegen am Lehrstuhl Strömungsmechanik für die anregenden fachlichen Diskussionen und die geleistete technische Unterstützung.

## Literatur

- Bhatnagar, P.L., Gross, E.P. & Krook, M., 1954. *A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems*. Phys. Rev., 94(3), pp. 511-525.
- Brede, M., Eckelmann, H. & Rockwell, D., 1996. *On secondary vortices in the cylinder wake*. Physics of Fluids, 8(8), p. 2117.
- Chapman, S. & Cowling, T.G., 1970. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*, Cambridge Univ. Press, ISBN 978-0-521-40844-8.
- Krafczyk, M., 2001. *Gitter-Boltzmann-Methoden: Von der Theorie zur Anwendung*. TU München.
- Kröger, W., Wolter, A., Damaschke, N., Leder, A., Borchert, S. & Höhne, S., 2012. *Messtechnikentwicklung für Kavitationsuntersuchungen am Kavitationstunnel K21 der Universität Rostock*, Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik, 20. Fachtagung.
- Krüger, T., Varnik, F. & Raabe, D., 2009. *Shear stress in lattice Boltzmann simulations*. Phys. Rev. E, 79(4), pp. 046704-046714.
- Lagrava Sandoval de Sucre, W.D., 2012. *Revisiting grid refinement algorithms for the lattice Boltzmann method*. Univ. Genève.
- Zdravkovich, M., 1997. *Flow around circular cylinders: a comprehensive guide through flow phenomena, experiments, applications, mathematical models, and computer simulations*, Oxford Univ. Press, ISBN 0-19-856396-5.