

Rekonstruktion von Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen aus Ensemble-Korrelations PIV Bildern

Reconstructing velocity distributions from single pixel ensemble correlation PIV images

Claudia Strobl, Daniel Quosdorf, Michael Manhart

Fachgebiet Hydromechanik, Technische Universität München, Arcisstr. 21, 80333 München

PIV, turbulente Strömungen, Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten
Particle Image Velocimetry, turbulent flows, velocity probability density

Zusammenfassung

Die Auswertung von PIV Bildern mit Hilfe der Ensemble-Korrelations-Technik erlaubt es, die räumliche Auflösung durch eine Verkleinerung des Abtastflecken auf die Größe eines Pixel erhöhen. Zeitgleich verliert man jedoch zunächst die zeitliche Auflösung und somit die Möglichkeit die höheren Momente der Strömungskomponenten zu bestimmen. Es wurde allerdings durch Scharnowski und Kähler (2013) und auch Strobl und Manhart (2013) gezeigt, wie aus den Ensemble-Korrelationen die Geschwindigkeits-Verteilung rekonstruiert werden kann. In diesem Beitrag wird diese Methode weiter getestet. Neben synthetischen Testfällen wird auch die experimentelle Anwendung auf wandnahe Profile in einer turbulenten Strömung über einen Hügel vorgestellt.

Einleitung

In Standard-PIV-Verfahren werden die Geschwindigkeiten einer Strömung aus der Korrelation der Bildintensitäten einzelner Abtastflecken eines PIV-Bildpaares ermittelt. Da die Abtastflecken eine Größe von i. d. Rgl. 16 bzw. 32 Pixel aufweisen, stellen die so gewonnenen Geschwindigkeitswerte eine auf die Größe des Abtastfleckens gemittelte Information dar. Bedient man sich dem von Meinhart und Werely (2000) eingeführten Ensemble-Korrelationsverfahren, so ist es durch die zeitliche Mittelung der Ergebnisse möglich Geschwindigkeitsvektoren mit einer Auflösung bis zu einem Pixel zu erhalten (single pixel accuracy), Westerweel et al. (2004). Jedoch gehen in diesem Fall alle zeitlichen Informationen über die Strömung auf Grund der Mittelung verloren. In frühen Anwendungen der single-pixel correlation Technik ging man davon aus, dass damit die höheren Momente eines turbulenten Geschwindigkeits-signals nicht mehr bestimmt werden können.

Allerdings ist in der Korrelationsfunktion die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (pdf) der Geschwindigkeiten enthalten, wie bei Soria und Willert (2012), Scharnowski et. al. (2012) dargestellt. Daraus könnte man deren Momente, z.B. die Reynoldsspannungen, berechnen, sofern man diese von der Korrelationsfunktion differenzieren könnte. Scharnowski et. al. (2012) schlagen vor, die pdf der Geschwindigkeit durch das Einpassen zweidimensionaler Gauskurven in die zeitlich gemittelte Korrelationsfunktion zu bestimmen und daraus die Reynoldsspannungen zu bestimmen. Jedoch ist dieses Verfahren auf gaussförmigen Vertei-

lungsfunktionen beschränkt. Um auch nicht gaussverteilte Verteilungsfunktionen rekonstruieren zu können schlagen Scharnowski und Kähler (2013) weiter vor, die pdf der Geschwindigkeit über die Entfaltung der Korrelationsfunktion mit der Autokorrelationsfunktion anzunähern, da die Korrelationsfunktion die Faltung der Autokorrelation mit der pdf der Geschwindigkeit darstellt. Scharnowski und Kähler (2013) berechnen die Korrelationsfunktion aus den Fluktuationen der Bildintensitäten.

Alternativ dazu haben Strobl und Manhart (2013a,2013b) gezeigt, dass sich die Korrelationsfunktion aus einem deterministischen und einem randomen Anteil zusammensetzt. Der randome Anteil kann quantifiziert werden und somit von der Korrelationsfunktion, hier aus den Bildintensitäten berechnet, abgezogen werden, um die pdf der Geschwindigkeiten zu rekonstruieren. Dieses Vorgehen wird im Folgenden erklärt.

Theoretische Betrachtung

Betrachtet man ein PIV Bild, so kann die Intensitätsverteilung des Bildes als die Faltung der Partikelpositionen $W(x)$ mit der Abbildungsfunktion eines einzelnen Partikels I_s beschrieben werden. Vergleicht man nun die Intensitätsverteilung eines PIV Bildpaares, so ist die Verteilung des zweiten Bildes die Verteilung des ersten Bildes, jedoch um den Verschiebungsvektor $r=v\Delta t$, abhängig von der lokalen Geschwindigkeit v , sowie dem Zeitintervall Δt zwischen den beiden Bildern, verschoben. Berechnet man nun aus diesen beiden Intensitätsverteilungen die Korrelationsfunktion $R(x_1, x_2) = I_1(x_1)I_2(x_2)$, so gilt es zwei Anteile zu unterscheiden: a) den deterministischen Anteil, welcher aus der tatsächlichen Verschiebung um den Vektor r entsteht und der Autokorrelation des ersten Bildes entspricht und b) den randomen Anteil, welcher aus der Korrelation mit allen übrigen Positionen besteht. Die Korrelationsfunktion kann daher mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Geschwindigkeit, wie folgt beschrieben werden:

$$R(x_1, x_2) = \langle I_1^2(x_1) \rangle P(v=r/\Delta t) + \langle I_1(x_1) \rangle \langle I_2(x_2) \rangle P(v \neq r/\Delta t) \quad (1)$$

Drückt man die Wahrscheinlichkeit des randomen Anteils mit $P(v \neq r/\Delta t) = 1 - P(v=r/\Delta t)$ aus und löst Gleichung (1) nach der Wahrscheinlichkeit auf, so erhält man die folgende Beziehung für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (pdf) der Geschwindigkeit:

$$P(v=r/\Delta t) = (\langle I_1(x_1)I_2(x_2) \rangle - \langle I_1(x_1) \rangle \langle I_2(x_2) \rangle) / (\langle I_1^2(x_1) \rangle - \langle I_1(x_1) \rangle \langle I_2(x_2) \rangle) \quad (2)$$

Welche im Ergebnis der Normierung der Korrelationsfunktion mit dem Produkt der Standardabweichungen der beiden Bilder (Gleichung (3)) gleichkommt.

$$P(v=r/\Delta t) = \frac{\langle I_1(x_1)I_2(x_2) \rangle - \langle I_1(x_1) \rangle \langle I_2(x_2) \rangle}{(\sqrt{\langle I_1^2(x_1) \rangle - \langle I_1(x_1) \rangle \langle I_1(x_1) \rangle} \sqrt{\langle I_2^2(x_2) \rangle - \langle I_2(x_2) \rangle \langle I_2(x_2) \rangle})} \quad (3)$$

Synthetische Testfälle

An Hand synthetisch erzeugter Bildpaare mit einem Partikelabbild von exakt einem Pixel konnten wir zeigen, dass diese Methode gegen die tatsächlich unterlegte Geschwindigkeits-pdf konvergiert (vgl. Abb. 1). Die Konvergenz ist unabhängig von der Form der pdf.

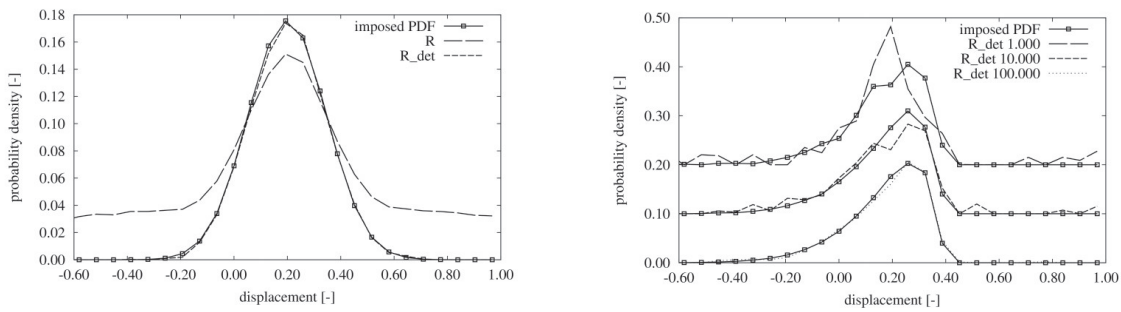


Abb. 1: links: Vergleich der tatsächlichen Geschwindigkeits pdf (imposed pdf) mit den mit der Autokorrelation genormten Werten der Korrelationsfunktion R und der um den zufälligen Anteil bereinigten Korrelationsfunktion R_det; 500 000 Bilderpaare, 5,2% Partikeldichte, 31 Pixel
 rechts: Konvergenz von R_det zur tatsächlichen normalverteilten linksschiefen Geschwindigkeits pdf für unterschiedliche Anzahlen an Bildpaaren, 5,2% Partikeldichte, 31 Pixel

Da in den Bildpaaren, die in Abbildung 1 verwendet wurden, die Breite eines Partikelabbildes exakt ein Pixel war, war in diesen ersten Testfällen eine Dekonvolution der Korrelationsfunktion, wie von Scharnowski und Kähler (2013) vorgeschlagen, nicht nötig. Ergänzend wurden nun synthetische Bilder mit gaussförmigen Partikelabbildern erzeugt. Auf diese Weise erhöht sich die Genauigkeit der Abbildung der tatsächlichen Partikelposition und der Geschwindigkeit. Allerdings ergeben sich breitere Verteilungsfunktionen (vgl. Abb. 2, unten). Diese Verschmierung der Korrelationsfunktion kann jedoch durch Entfalten (Dekonvolution) der Korrelationsfunktion behoben werden (vgl. Abb. 2), womit das Vorgehen von Scharnowski und Kähler (2013) bestätigt wird.

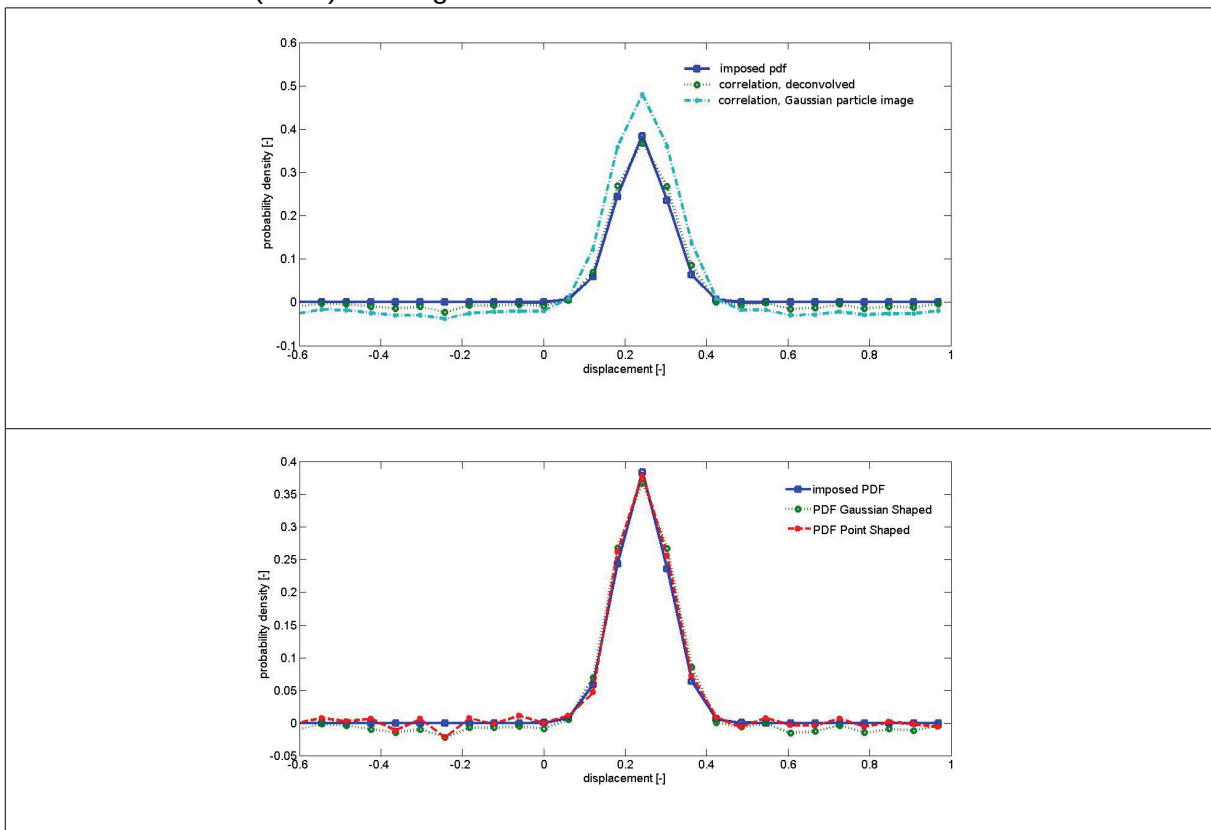
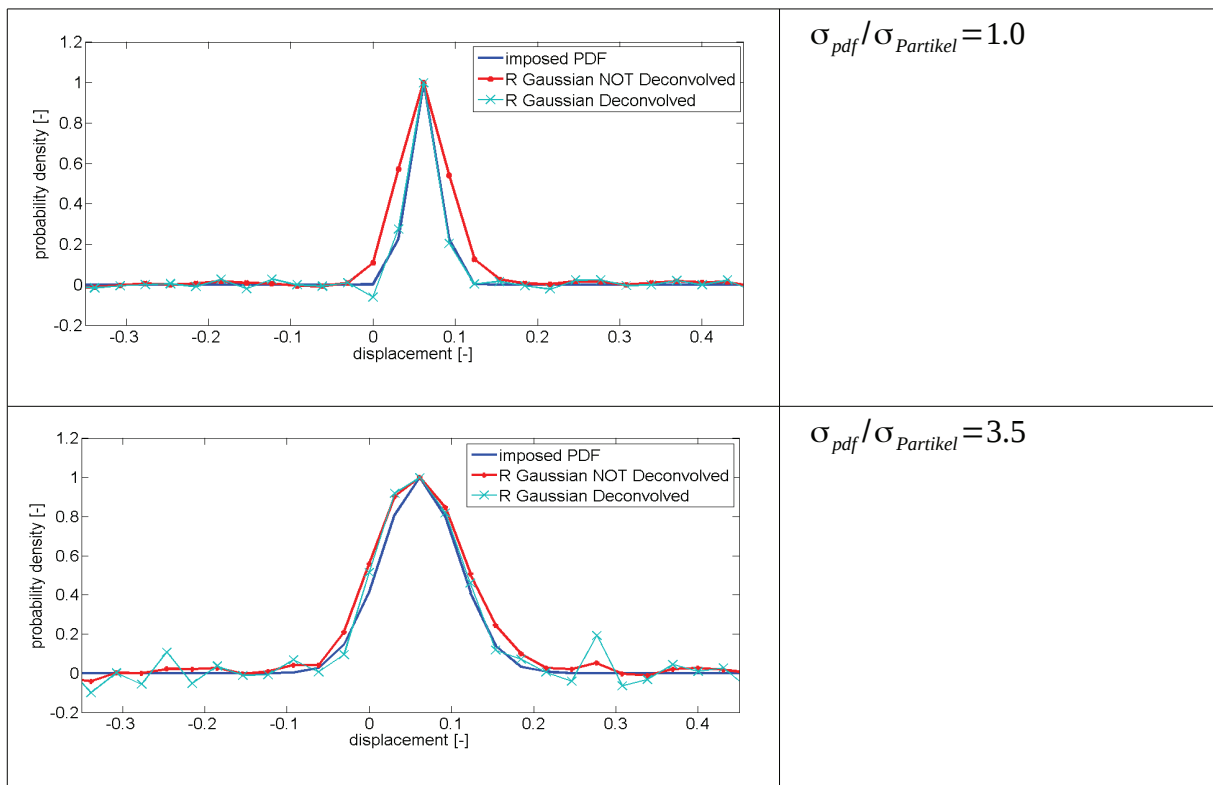


Abb. 2: oben: Vergleich der tatsächlichen Geschwindigkeits pdf (imposed pdf) mit der rekonstruierten Verteilungsfunktion für gaussförmige, entfaltete Partikelabbildern und für gaussförmige nicht entfaltete Partikelabbildern; 10 000 Bilderpaare, 10% Partikeldichte, 33 Pixel

unten: Vergleich der tatsächlichen Geschwindigkeits pdf (imposed pdf) mit der rekonstruierten Verteilungsfunktion für gaussförmige, entfaltete Partikelabbilder und punktförmige, nur einen Pixel abdeckende Partikelabbilder; 10 000 Bilderpaare, 10% Partikeldichte, 33 Pixel

Einfluss des Verhältnisses der Breite der PDF zur Breite des Partikelabbildes

In einem nächsten Schritt testen wir den Einfluss des Verhältnisses der Breite der Geschwindigkeits-PDF σ_{pdf} zur Breite des Partikelabbildes $\sigma_{Partikel}$. Dazu wurde die Breite des Partikelabbildes konstant gehalten und die Breite der Geschwindigkeitsverteilungsfunktion vergrößert. Mit zunehmender Breite des Geschwindigkeitsverteilung nimmt der relative Einfluss der Breite des Partikelabbildes ab. Dies wird in Abbildung 3 deutlich. Falls die Breite der PDF derjenigen des Partikelabbildes entspricht ($\sigma_{pdf}/\sigma_{Partikel}=1.0$), ist die Korrelationsfunktion vor der Dekonvolution deutlich breiter als die unterlegte Geschwindigkeits-PDF. Bei einem Verhältnis von $\sigma_{pdf}/\sigma_{Partikel}=6.0$ ist der Einfluss des Partikelbildes auf die Korrelationsfunktion gering, so dass die Geschwindigkeits-PDF auch ohne Dekonvolution gut approximiert wird. Das lässt sich damit erklären, dass die Faltung der Korrelationsfunktion mit dem Partikelabbild im Fourierraum einer Multiplikation der Fourierkoeffizienten entspricht. Bei einer sehr breiten PDF werden die Fourierkoeffizienten der hohen Wellenzahlen klein, so dass ein Multiplikation mit den Fourierkoeffizienten des Partikelabbildes nur mehr einen relativ geringen Einfluss hat. Je größer das Verhältnis zwischen der Breite der Geschwindigkeitsverteilung und der Breite des Partikelabbildes ist, desto geringer ist der Einfluss des Partikelabbildes auf die Korrelationsfunktion (vgl. Abbildung 3).



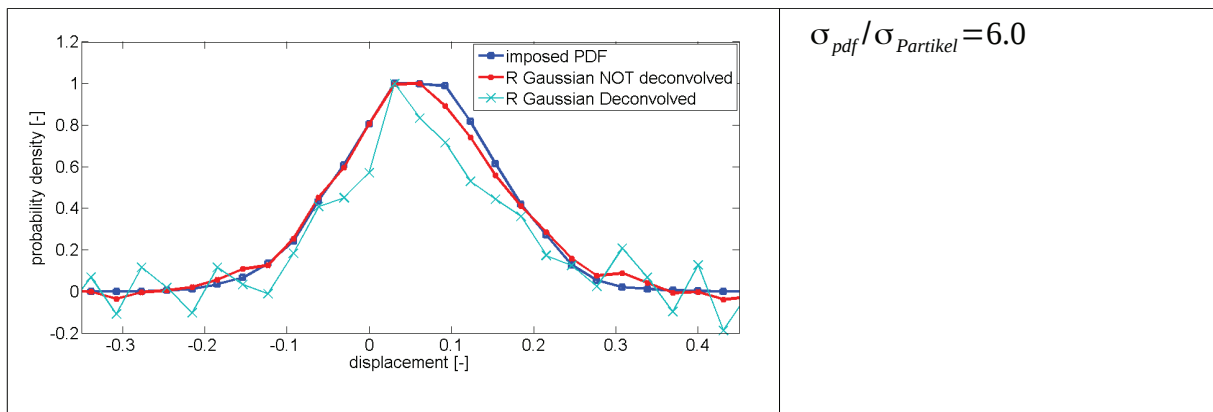


Abb. 3: Vergleich der tatsächlichen Geschwindigkeits pdf (imposed pdf) mit der rekonstruierten Verteilungsfunktion für gaussförmige, entfaltete Partikelabbilder und für gaussförmige nicht entfaltete Partikelabbilder für unterschiedliche $\sigma_{pdf}/\sigma_{Partikel}$ - Verhältnisse; 10 000 Bilderpaare, 10% Partikeldichte, 65 Pixel

Die Anwendbarkeit der Entfaltung der Korrelationsfunktion mit der Autokorrelation kann daher nicht an der Partikelgrößen alleine festgemacht werden, da das Verhältnis zwischen der Breite der Verteilungsfunktion und der Breite des Partikelabbildes einen maßgeblichen Faktor darstellt.

Anwendung auf wandnahe Messungen an einem Hügel im Wasserkanal

Ergänzend zu den synthetischen Bildern wurde das vorgeschlagene Verfahren auf PIV-Daten der Strömung über periodisch angeordnete Hügel angewandt. Die Reynoldszahl betrug $Re_b = u_b h / \nu = 37000$. Die Hügelhöhe beträgt $h = 0.05\text{m}$ und der Hügelabstand $9h$. Details zum Versuchsaufbau finden sich bei Rapp und Manhart (2011). In diesen früheren Messungen konnten die Geschwindigkeitsprofile nur bis zu einem Wandabstand von etwa $\Delta y \approx 2,5\text{mm}$ berechnet werden. Eine bessere Wandauflösung wurde durch Reflexionen an der Wand, den Abbildungsmaßstab und vor allem durch die Verwendung von Abtastflecken von 32×32 Pixel verhindert. Aufgabe der hier vorgestellten neuen Messungen ist, im Luvbereich des Hügels die wandnahen Profile der zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten und Reynoldsschen Spannungen zu bestimmen, um die Wechselwirkung der inneren mit der äußeren Schicht zu analysieren. Im Folgenden werden erste Ergebnisse hierzu gezeigt.

In der hier vorgestellten Messung wurden Bilder (2048×2048 Pixel) mit einer räumlichen Auflösung von $13\mu\text{m}/\text{pixel}$ aufgenommen. Als Seedingmaterial wurden Rhodamin-B Partikel mit Durchmessern ca. $1-20\mu\text{m}$ verwendet. Leider war die Partikeldichte durch die verwendete hohe räumliche Auflösung der Abbildung auf ca. 5 Partikel pro (32×32) Abtastfleck begrenzt. Wir vergleichen hier Auswertungen mit Abtastflecken von 32×32 Pixeln mit einer Ensemble-Korrelations-Auswertung. Bei letzterer wurden die Korrelationsfunktionen sowohl über die 10000 Bildpaare als auch über Abtastflecken von 7×7 Pixeln gemittelt, um die Profile zu glätten.

In Abbildung 4 werden die beiden beschriebenen Auswertungen mit den Messungen von Rapp und Manhart (2011) an der Luv-Seite des Hügels bei $x/h = 8.0$ verglichen. Man sieht deutlich die bessere Auflösung der wandnahen Profile durch die neuen Messungen. Während in Abbildung 4 (links) der Bereich bis $y/h = 1$ gezeigt wird, ist in Abbildung 4 (rechts) ein wandnaher Zoom bis $y/h = 0.6$ zu sehen, was einem Wandabstand von $\Delta y/h = 0.15$ bzw. $\Delta y = 7.6\text{mm}$ entspricht. Dabei wurde zur besseren Unterscheidung der Profile nur jeder fünfte Messpunkt der Ensemble-Korrelations-Auswertung geplottet. In Abbildung 5 wer-

den die in das Hugelkoordinatensystem transformierten tangentialen Geschwindigkeiten gezeigt.

Im wandferneren Bereich erkennt man statistische Schwankungen, die aus der geringen Partikeldichte herrühren, aus der sich insgesamt pro Wert in etwa 2500 Partikelbilder ergeben. Aus dem Profil nahe der Wand lässt sich eine Wandschubspannung von $\tau_w \approx 1.8 \text{ N/m}^2$ abschätzen. Daraus ergibt sich eine Wandeinheit zu $\nu/u_\tau \approx 24 \mu\text{m}$. Die Profile sind bis etwa $\Delta y \approx 52 \mu\text{m}$ linear, was der speziellen Situation der Wandgrenzschicht zuzuschreiben ist. Diese Werte sind allerdings im derzeitigen Zustand der Auswertung als vorläufig einzustufen.

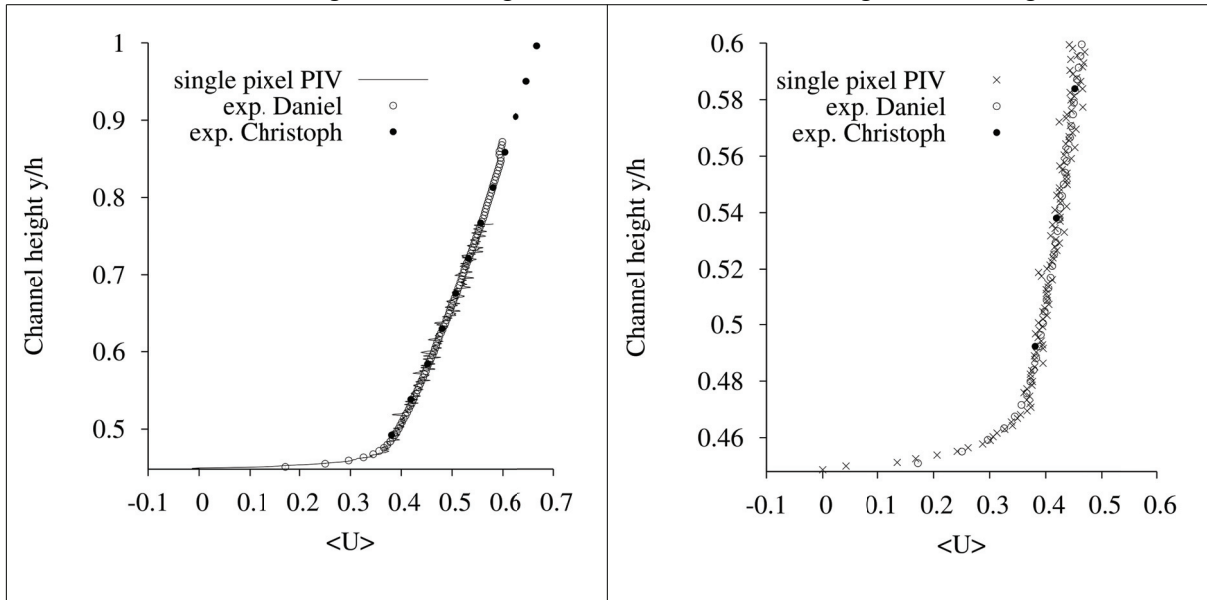


Abb. 4: Vergleich der zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten in horizontaler Richtung bei $x/h=8$ für Ensemble Korrelations PIV (gemittelt auf $7 \times 7 \text{ Px}$, $1 \text{ Px}=13 \mu\text{m}$), Standard-PIV (Abtastfleck $32 \times 32 \text{ Px}$, $1 \text{ Px}=13 \mu\text{m}$), Standard-PIV (Abtastfleck $32 \times 32 \text{ Px}$, $1 \text{ Px}=141 \mu\text{m}$) links: Darstellung über die gesamte Fließtiefen, rechts: Zoom im wandnahen Bereich

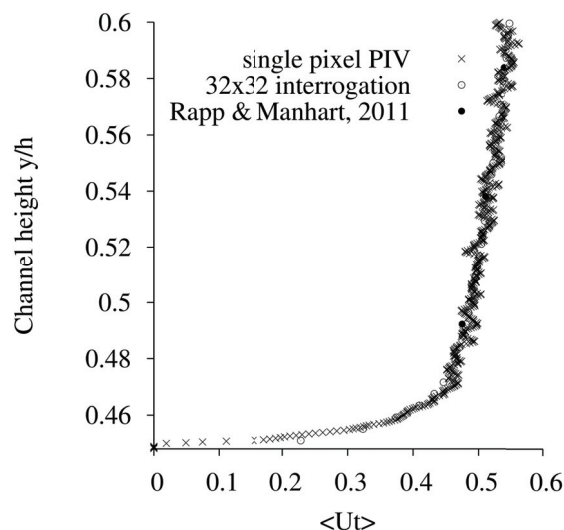


Abb. 5: Vergleich der tangentialen zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten bei $x/h=8$ für single pixel PIV (gemittelt auf $7 \times 7 \text{ Px}$, $1 \text{ Px}=13 \mu\text{m}$), exp. Daniel (Abtastfleck $32 \times 32 \text{ Px}$, $1 \text{ Px}=13 \mu\text{m}$), exp. Christoph (Abtastfleck $32 \times 32 \text{ Px}$, $1 \text{ Px}=141 \mu\text{m}$).

Bei der Anwendung der Ensemble-Korrelations-Auswertung traten mehrere Probleme auf. Eines der Probleme war die geringe Partikeldichte, die durch die enorme räumliche Auflo-

sung der Abbilder bedingt war. Die Korrelationsfunktionen wurden dadurch nicht glatt. Dem wurde durch lokale Mittelung der Korrelationsfunktionen über 7×7 Pixel abgeholfen. Ein zweites Problem war, dass die Korrelationen fern des Korrelationspeaks nicht auf Null abgeklungen waren. Der Grund dafür ist derzeit noch nicht geklärt. Allerdings verursacht dies Probleme bei der Integration über die PDF der Geschwindigkeiten, da Anteile von der nicht abgeklungenen Korrelationsfunktion auftreten, die das Ergebnis verfälschen. In den hier gezeigten Ergebnissen wurden die Korrelationsfunktionen vor der Auswertung derart korrigiert, dass die Randbereiche auf Null abklingen (siehe Abbildung 6).

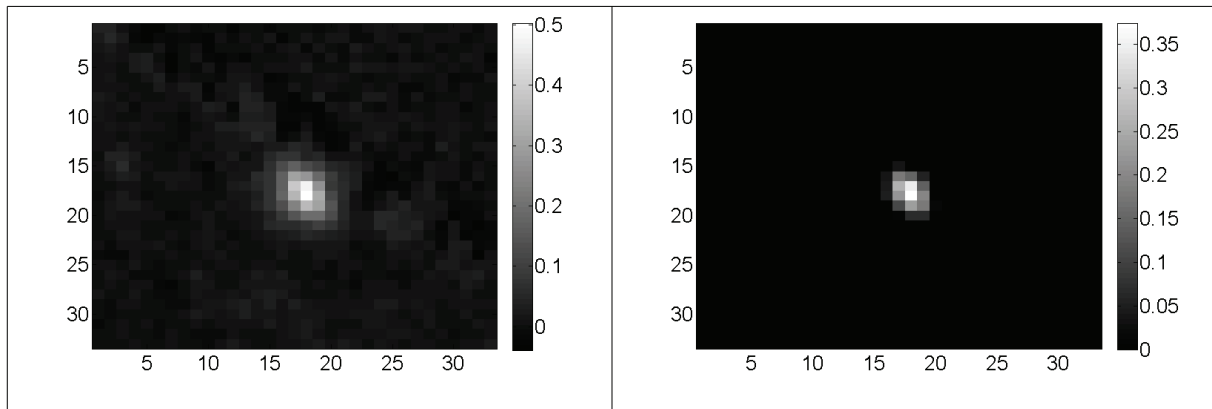


Abb. 6: Vergleich Korrelationsfunktion nicht bereinigt (links) und Randbereiche um konstanten Faktor bereinigt (rechts).

Schlussfolgerungen

In diesem Beitrag wird die Auswertung der Ensemble-Korrelations-Auswertung von PIV-Bildern diskutiert. Zunächst wurde der Einfluss des Verhältnisses zwischen Breite der Geschwindigkeitsverteilung und derjenigen des Partikelabbildes analysiert. Falls die Geschwindigkeitsverteilung ($\Delta U \cdot \Delta t$ gemessen in Pixeln) breit im Vergleich mit dem Partikelabbild in Pixeln ist, kann die Verbreiterung der Bild-Korrelation durch die Partikelabbilder vernachlässigt werden. Bei schmaler Geschwindigkeitsverteilung ist jedoch eine Dekonvolution essentiell, um genaue Breiten der Verteilung zu bekommen.

Die Ensemble-Korrelations-Auswertung wurde auf PIV-Bilder einer Strömung um periodisch angeordnete Hügel angewendet. Dabei stellt die durch die erhöhte räumliche Auflösung reduzierte Partikeldichte in den Bildern besondere Anforderungen an die Auswertung. Hier wurden die Geschwindigkeitsprofile durch räumliche Mittelung der Korrelationsfunktionen geglättet. Durch die Ensemble-Korrelations-Auswertung konnte letztendlich bis in den viskos dominierten Bereich der Grenzschicht im Luvbereich des Hügels gemessen werden und somit die lokale Wandschubspannung bestimmt werden. Allerdings sind weitere Verfeinerungen der Auswertung nötig, um noch bestehende Unsicherheiten zu eliminieren.

Literatur

- Meinhart, C.D. and Werely, S.T.: "A PIV algorithm for estimating time-averaged velocity fields", Journal for Fluids Engineering, 122, pp. 285-289, 2000.
 Rapp, C., Manhart, M., „Flow over periodic hills: an experimental study“, Exp Fluids, 51:247-269, 2011
 Scharnowski, S., Hain, R., Kähler, C.J.: "Reynolds stress estimation up to single-pixel resolution using PIV-measurements", Experiments in Fluids, vol. 52, pp. 985-1002, 2012.

Scharnowski, S., Kähler, C.J.: "Methods for estimating higher order moments from PIV data", 10th International Symposium on Particle Image Velocimetry – PIV 13, Delft, The Netherlands, July 1-3, 2013.

Soria, J., Willert, C.: "On measuring the joint probability density function of three-dimensional velocity components in turbulent flows", Meas. Sci. Tech., vol. 23, 2012

Strobl, C., Manhart, M.: "Reconstruction the velocity distributions from single pixel correlation PIV", 8th World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics, and Thermodynamics June 16-20, 2013, Lisbon, Portugal, 2013.

Strobl, C., Manhart, M.: "Reconstruction of velocity distributions from single pixel correlation PIV", Fachtagung "Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik" GALA 2013, München, 3. – 5. September, 2013.

Westerweel, P.F. Geelhoed. Lindken R.: "Single-pixel resolution ensemble correlation for micro-PIV applications", Experiments in Fluids, vol. 37, pp. 375-384, 2004.