

## MESSUNSICHERHEIT DER GESCHWINDIGKEITSDARSTELLUNG ZUR LDA-KALIBRIERUNG MIT ROTIERENDER SCHEIBE

### MEASUREMENT UNCERTAINTY OF THE REALISATION OF VELOCITY FOR THE CALIBRATION OF LDA WITH A ROTATING DISK

**V. Strunck, N. Pape, H. Müller, B. Mickan**

Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB)  
Bundesallee 100, 38116 Braunschweig  
Tel: 0531-592-1311, Fax: 0531-592-1405  
e-mail: volker.strunck@ptb.de

Kalibrierung, Laser-Doppler-Anemometer, rotierende Scheibe, Unsicherheit, Interferometrie  
Calibration, Laser Doppler Anemometer, rotating Disk, Uncertainty, Interferometry

#### Zusammenfassung

Die Laser-Doppler-Anemometer Kalibriereinrichtung mit einer rotierenden Glasscheibe wird für eine Unsicherheitsanalyse untersucht. Die verschiedenen Quellen der Unsicherheit mit ihren sowohl statischen als auch dynamischen Eigenschaften sind in einem Unsicherheitsbudget aufgeführt. Die von Unwucht erzeugten Vibrationen sind interferometrisch vermessen worden. Insgesamt ergibt sich für die Bestimmung der Scheibengeschwindigkeit ohne Berücksichtigung der Exzentrizität der Scheiben eine erweiterte Unsicherheit von  $6 \cdot 10^{-4}$ .

#### Einleitung

Ein Laser-Doppler-Anemometer (LDA) erlaubt die genaue und berührungsfreie Messung von Strömungsgeschwindigkeiten in einem großen Messbereich mit großer Dynamik. Die Geschwindigkeit  $v$  wird aus einem Streifenabstand  $d$  und der gemessenen Frequenz  $f_D$  ermittelt:

$$v = d \cdot f_D \quad (1)$$

Das Ziel der LDA-Kalibrierung ist die Bestimmung des Streifenabstandes  $d$  als Gerätekonstante. Theoretisch kann die Gerätekonstante aus der Geometrie des LDAs bestimmt werden. Ist der Winkel  $\varepsilon$  zwischen den zwei sich kreuzenden Laserstrahlen und die Wellenlänge des Lasers bekannt, so ist die Gerätekonstante nach der Theorie

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}} \quad (2)$$

Die Winkelbestimmung ist schwierig und setzt zudem ebene Wellenfronten im Messvolumen voraus.

Daher wird die Gerätekonstante  $d$  einfacher mittels einer bekannten Geschwindigkeit  $v$  bestimmt:

$$d = v / f_D \quad (3)$$

In der PTB wird die Geschwindigkeit  $v$  für die LDA-Kalibrierung mit einer rotierenden Glasscheibe dargestellt, siehe Dopheide 1995.

Im Folgenden wird die Unsicherheit dieser Geschwindigkeitsdarstellung untersucht.

### Aufbau der Kalibriereinrichtung

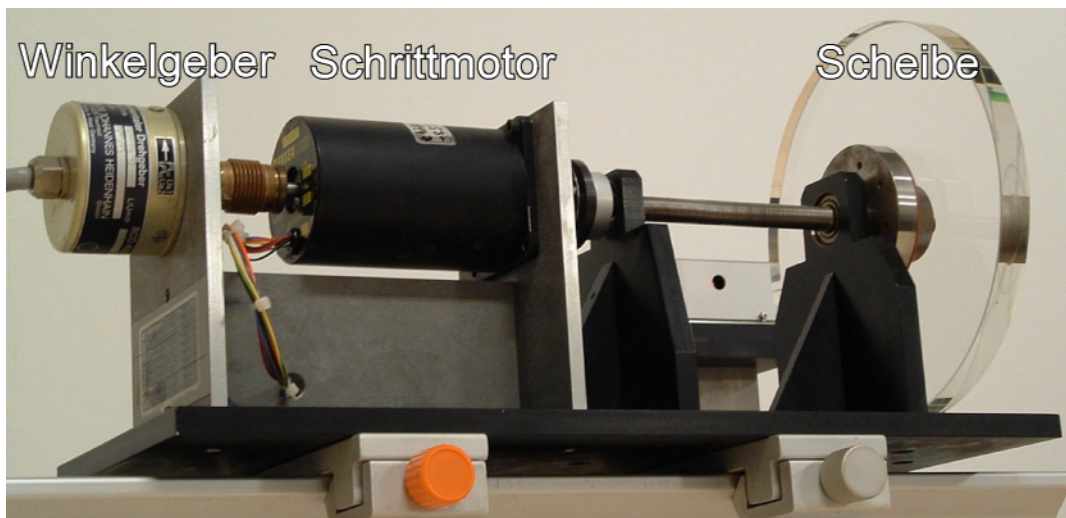


Abb. 1: Kalibriereinrichtung mit rotierender Scheibe

Die rotierende zylindrische Glasscheibe ist aus BK7-Glas gefertigt und hat einen mittleren Durchmesser von  $2r = 184,1574$  mm und eine Höhe  $h$  von 18,6 mm. Der Durchmesser der Bohrung zur Befestigung auf einer Achse beträgt 18 mm. Die Achse wird von einem Motor angetrieben. Der Antrieb ist ein 5-Phasen-Schrittmotor mit einer Zähnezahzahl von 100, so dass man pro Rotorumdrehung im Vollschrittbetrieb 500 Schritte erhält, entsprechend einem Schrittwinkel von  $0,72^\circ$ . Ein auf der Achse angebrachter inkrementaler Drehgeber mit einer Auflösung von 1000 Signalperioden pro Umdrehung liest die erreichte Winkelgeschwindigkeit aus. Die Ansteuereinheit sorgt für eine genau einstellbare Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Die Tangentialgeschwindigkeit  $v$  an der Scheibenkante ist

$$v = r \cdot \omega \quad (4)$$

Das zu kalibrierende LDA ist an einem Verschiebegerät montiert, das das Messvolumen an die Scheibenkante heranzieht. Die Streifen des LDAs werden orthogonal zum Vektor der tangentialen Geschwindigkeit und der Scheibenkante ausgerichtet. Die optische Achse des LDAs und der Radius der Scheibe liegen übereinander.

Während der Bewegung des Streuteilchens durch das Messvolumen wird sein Signal mit einer im PC eingebauten Transientenrekorderkarte aufgenommen und anschließend mit einer Fourieranalyse im PC ausgewertet.

Wegen der zufälligen Verteilung der Streuteilchen auf der Scheibenkante müssen diese gesucht und von Hand selektiert werden. Damit werden zu große Streuteilchen und auch mehrere Streuteilchen im Erfassungszeitfenster vermieden. Um die Darstellung des Streuteilchensignals im Zeitfenster der Erfassungskarte zu verfeinern, ist die Unterteilung des Winkelgebers im dynamischen Betrieb mit einer Phasenregelschleife um den Faktor 10 vergrößert worden, was eine noch präzisere Auslösung der Datenerfassung erlaubt.

Da durch den inkrementellen Winkelgeber die Winkelposition  $\varphi$  und durch das Verschiebegerät die Höhenposition  $h$  auf der Scheibe festgelegt wird, ist die Streuteilchenposition  $p(r, \varphi, h)$  auf der Scheibenkante bekannt.

### Fehlerquellen

Ohne Installationsfehler würde sich die Unsicherheitsanalyse auf die Gleichung

$$d = \frac{\omega \cdot r}{f_D} \quad (5)$$

beschränken. Die Ausrichtung des Messvolumens auf die Zylinderfläche wird von zwei Winkelfehlern begleitet.

Der Höhenfehler entsteht, wenn die optische Achse des LDAs nicht auf das Zentrum der Scheibe zeigt. Dieser Versatz in der Höhe resultiert in einen Kosinusfehler, der mit dem Winkel  $\alpha$  in Abb. 2 beschrieben wird. Der Winkel  $\alpha$  kann minimiert werden, wenn sich die von den Laserstrahlen  $L_1$  und  $L_2$  reflektierten Specklemuster  $S_1$  und  $S_2$  symmetrisch zur optischen Achse des Lasers verteilen. Ein weiterer Winkelfehler mit dem Winkel  $\beta$  entsteht, wenn die Ebene der Beleuchtungsstrahlen eine Neigung zur Achse der Glasscheibe hat.

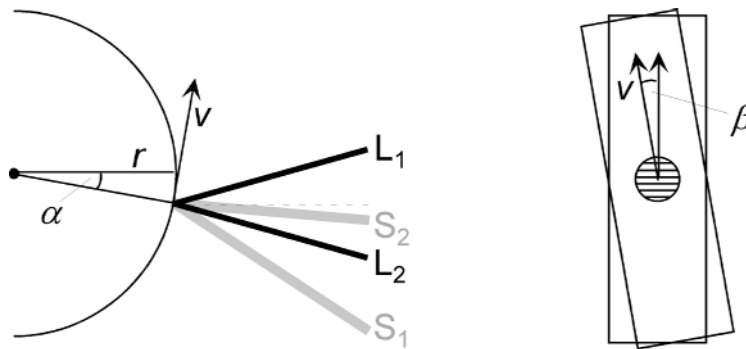


Abb. 2: Höhenfehler und Winkelfehler

Mit Berücksichtigung der Winkelfehler ergibt sich für den Streifenabstand

$$d = \frac{\omega \cdot r}{f_D} \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (6)$$

Nach JCGM/WG1 ist dies ein typisches Kosinusfehler-Problem, das wie folgt gehandhabt wird. Weil  $\alpha$  und  $\beta$  klein sind, werden  $\delta_1 = 1 - \cos \alpha$  und  $\delta_2 = 1 - \cos \beta$  eingeführt, so dass

$$d = \frac{\omega \cdot r}{f_D} (1 - \delta_1) \cdot (1 - \delta_2) \approx \frac{\omega \cdot r}{f_D} (1 - \delta_1 - \delta_2). \quad (7)$$

Für  $\delta_1, \delta_2 \ll 1$  gilt nach der Reihenentwicklung  $\delta_1 \approx \alpha^2/2$  und  $\delta_2 \approx \beta^2/2$ .

### Unsicherheitsanalyse

Die kombinierte Unsicherheit  $u_c$  des Streifenabstands  $d$  ergibt nach Gl. 7

$$u_c^2(d)/d^2 = c_r^2 u^2(r) + c_\omega^2 u^2(\omega) + c_{f_D}^2 u^2(f_D) + c_{\delta_1}^2 u^2(\delta_1) + c_{\delta_2}^2 u^2(\delta_2) \quad (8)$$

mit den Sensitivitätskoeffizienten

$$c_r = \frac{\partial d}{\partial r} \cdot \frac{1}{d} \approx \frac{\omega}{f_D} (1 - \delta_1 - \delta_2) \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{r} \quad (8a)$$

$$c_\omega = \frac{\partial d}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{d} \approx \frac{r}{f_D} (1 - \delta_1 - \delta_2) \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{\omega} \quad (8b)$$

$$c_{f_D} = \frac{\partial d}{\partial f_D} \cdot \frac{1}{d} \approx -\frac{r \cdot \omega}{f_D^2} (1 - \delta_1 - \delta_2) \cdot \frac{1}{d} = -\frac{1}{f_D} \quad (8c)$$

$$c_{\delta_1, \delta_2} = \frac{\partial d}{\partial \delta_{1,2}} \cdot \frac{1}{d} = -\frac{r \cdot \omega}{f_D} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{(1 - \delta_1 - \delta_2)} \quad (8d,e)$$

Mit Einführung von  $K = 1 - \delta_1 - \delta_2$  wird Gl. 8 zu

$$\frac{u_c^2(d)}{d^2} = \left(\frac{u(r)}{r}\right)^2 + \left(\frac{u(\omega)}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{u(f_D)}{f_D}\right)^2 + \frac{u(\delta_1)^2}{K^2} + \frac{u(\delta_2)^2}{K^2} \quad (9)$$

Im Folgenden werden die einzelnen Beiträge untersucht.

### $\delta_1$

Die Symmetrie der Specklemuster der rückgestreuten Laserstrahlen zu den Laserstrahlen auf einem im Abstand der Brennweite  $L$ , also nahe der Sendelinse, angebrachten Schirm ist auf etwa  $A_{\text{sym}} = 1$  mm bestimmbar. Für eine typische Brennweite von 300 mm wird der Winkel  $\alpha$

$$\alpha = \arctan(A_{\text{sym}}/L) \approx A_{\text{sym}}/L \approx 1/300 \approx 0,0033$$

Der Kosinus-Fehler hat eine asymmetrische Verteilung. Für den möglichen Fehler von  $\delta_1$  wird für  $\alpha$  eine Rechteckverteilung mit den Grenzen  $\pm 0,0033/2$  angenommen. Das ergibt nach JCGM/WG1 S. 67 für  $\delta_1$  den Erwartungswert und die Unsicherheit

$$E(\delta_1) = 0,00165^2/6 = 4,54 \cdot 10^{-7} \quad \text{und} \quad u(\delta_1) = \sqrt{0,00165^4/45} = 4,06 \cdot 10^{-7}.$$

### $\delta_2$

Die Fehlerverteilung durch das schiefe Ausrichten des LDAs auf die Scheibe wird ebenso als Rechteckverteilung des Winkels  $\beta$  mit den Grenzen von  $\pm 0,5^\circ$  (entsprechend  $\pm 0,0087$  rad) beschrieben:

$$E(\delta_2) = 0,0087^2/6 = 1,26 \cdot 10^{-5} \quad \text{und} \quad u(\delta_2) = \sqrt{0,0087^4/45} = 1,13 \cdot 10^{-5}.$$

### $\omega$

Während der Kalibrierung wird die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der rotierenden Scheibe mit Hilfe des Winkelgebers elektronisch konstant gehalten. Zu jeder vollen Umdrehung in der Zeit  $T$  erzeugt dieser ein Synchronsignal, das zusätzlich mit einer an der Scheibe angebrachten Lichtschranke untersucht wurde. Mit  $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi / T$  erhält man die Unsicherheit

$$u(\omega) = 2\pi \cdot \frac{-u(T)}{T^2} \quad \text{oder} \quad \frac{u(\omega)}{\omega} = \frac{-u(T)}{T}.$$

Aus der Unsicherheit der Scheibenperiode  $u(T) = 3,86 \mu\text{s}$  (s. Abb. 3) im Kalibrierbetrieb bei  $T = 70 \text{ ms}$  ergibt sich  $u(\omega) = 4,95 \cdot 10^{-3}/\text{s}$ . Die Abb. 3 zeigt die auf die Scheibenperiode bezogenen Unsicherheiten der Scheibe selbst, des Gebers und der Zeitdifferenz zwischen dem Geber-Synchronpuls und dem Lichtschrankensignal der Scheibe. Bei Scheibendrehzahlen größer als  $4/\text{sec}$  sind die relativen Unsicherheiten geringer als  $10^{-4}$ .

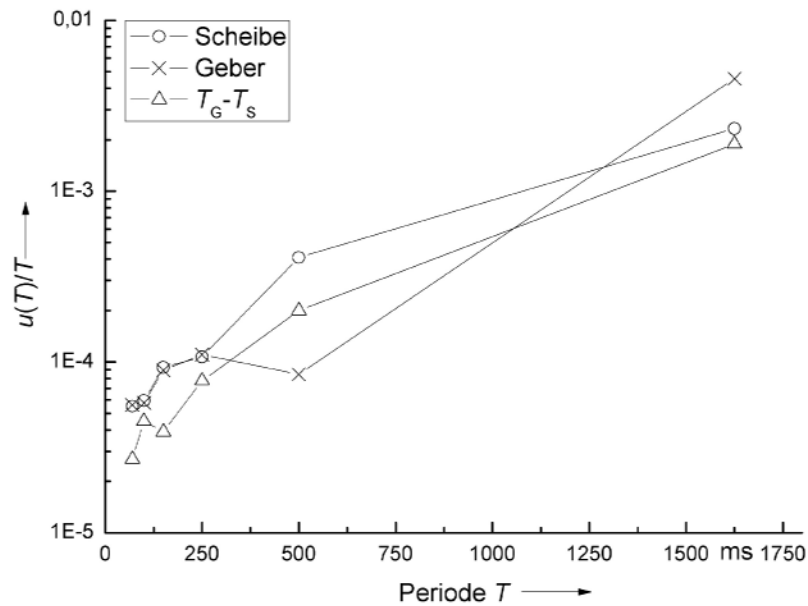


Abb. 3: Relative Unsicherheit der Scheibenperiode

*r*

Der Scheibenradius hat den größten Einfluss auf die tangentielle Geschwindigkeit. Während die Rundheit der Scheibe selbst Abweichungen von geringer als  $3 \mu\text{m}$  am Koordinatenmessgerät zeigt, ist nach dem Einbau der Scheibe auf der Achse des Motors mit einer Exzentrizität zu rechnen. Im Betrieb könnten durch Inhomogenitäten des Materials, radiale Abweichungen und die Exzentrizität noch zusätzliche Effekte hinzukommen. Da die Glasscheibe sowohl an der Zylinderoberfläche und der Grundfläche glatt ist, konnte die Dynamik der Scheibe mit einem Interferometer untersucht werden.

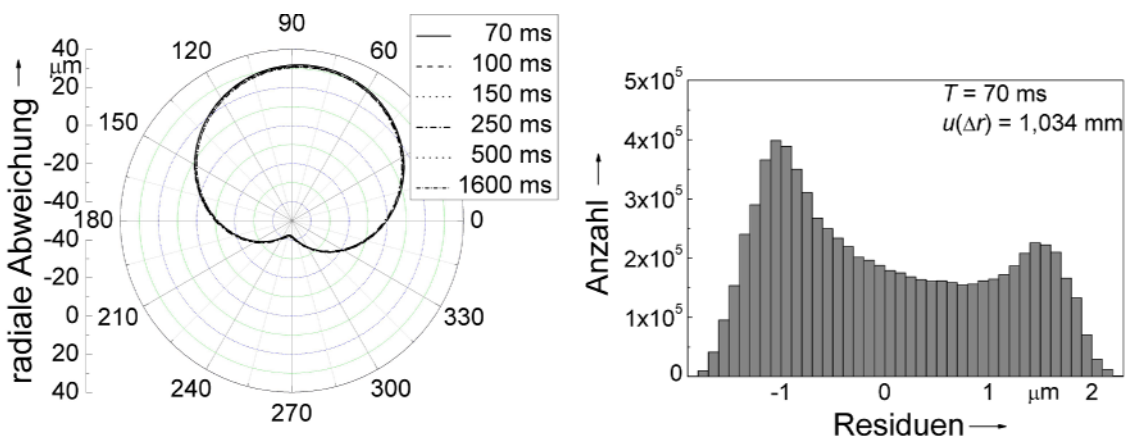


Abb. 4: Exzentrizität der Scheibe und residuale Abweichungen

Im Kalibrierbetrieb ist der Radius  $r(p) = 92079 + 37,2 \cdot \sin(2\pi/10000 \cdot (p-2322)) \pm 1,034$  in  $\mu\text{m}$ , wobei  $p$  [0...9999] die eingestellte Position des Streuteilchens ist. Die Abb. 4 zeigt, dass die größten Abweichungen durch die Exzentrizität hervorgerufen werden. Nach Abzug der Exzentrizität ist die Standardabweichung der Residuen mit  $1,034 \mu\text{m}$  gering. Da die Exzentrizität eine U-Verteilung (Arcus-Sinus) erzeugt, ist die Unsicherheit des unkorrigierten Radius  $u(r) = \sqrt{(37,2^2/2 + 1,034^2)} = 26,32 \mu\text{m}$ .

Die Kalibriereinrichtung wurde zusätzlich auf Schwingungen und deren mögliche Übertragung auf das zu kalibrierende LDA untersucht. Außer der Grundfrequenz durch die Exzentrizität wurde eine zusätzliche Frequenz des 3,06-fachen der Grundfrequenz gefunden. Ursache hierfür ist das Vorhandensein eines schwingfähigen Systems von Achse, Scheibe und dem Magnetfeld im Schrittmotor. Sie erklärt auch die U-Verteilung der Residuen in Abb. 4.

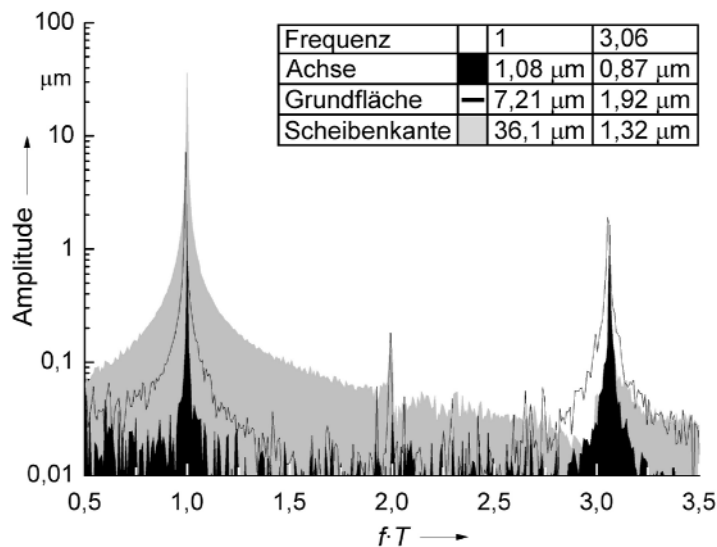


Abb. 5: Spektren von Achse, Grundfläche und Scheibenkante

Neben der schon erwähnten Exzentrizität zeigt auch der Planlauf der Scheibe einen kleinen Winkel zur Achse. Während bei der Frequenz  $1/T$  der Scheibe das LDA immer den gleichen Pfad entlang der Scheibe abtastet, sorgt bei einer Frequenz von 3,06 die Vibration der Grundfläche für eine Schlingerbewegung von  $\pm 2 \mu\text{m}$  entlang dieses Pfades, die sich nach etwa  $1 / 0,6 \approx 17$  Umläufen wiederholt. Am LDA-Signal sieht man dieses Verhalten als periodische Veränderung der Amplitude, wenn sich das Streuteilchen seitlich vom Maximum durch das Messvolumen bewegt.

Da an der Achsenhalterung nur minimale Vibrationen auftreten, ist mit einer Übertragung der Vibrationen auf das LDA selbst nicht zu rechnen.

### $f_D$

Die LDA-Signale der Streuteilchen werden mit der Fouriertransformation ausgewertet. Den besten Schätzwert erhält man unter Berücksichtigung der Cramér-Rao-Grenzregel (CRB) nach Rife und Boorstyn:

$$u(f_D) = \sqrt{\frac{6}{(2\pi)^2 \cdot SNR \cdot N \cdot (N^2 - 1)}} \cdot f_s$$

Mit der Erfassungsfrequenz  $f_s$  von 50 MHz, einer Speichertiefe  $N$  von 2048 Daten, einem Signal-Rauschverhältnis ( $SNR$ ) von 20 dB und einer typischen Dopplerfrequenz von etwa 1 MHz im Betrieb ergibt sich als Unsicherheit für die Dopplerfrequenz  $u(f_D) = 21 \text{ Hz}$  entsprechend  $u(f_D)/f_D = 2,1 \cdot 10^{-5}$ .

## Kombinierte Unsicherheit

Die Tabelle zeigt die aufgeführten Unsicherheitsbeiträge:

Beitrag	Fehlerquelle	Wert	Typ	Freiheitsgrad
$u(\delta_1)$	Höhenfehler	$4,06 \cdot 10^{-7}$	B	$\infty$
$u(\delta_2)$	Winkel zur Scheibe	$1,13 \cdot 10^{-5}$	B	$\infty$
$u(\omega)$	Stabilität der Winkelgeschwindigkeit	$4,95 \cdot 10^{-3} /s$	A	114*
$u(r)$	Exzentrizität und Radius	26,32 $\mu\text{m}$	A	114*
$u_k(r)$	Radius (korrigierte Exzentrizität)	1,034 $\mu\text{m}$	A	114*
$u(f_D)$	Frequenz	$2,1 \cdot 10^{-5} \cdot f_D$	B	$\infty$

Es wurden 115 Umläufe der Scheibe erfasst.

Die in der Tabelle aufgeführten Unsicherheitsbeiträge sind statistisch unabhängig voneinander und können für die Berechnung der Unsicherheit des Streifenabstands nach Gl. 9 berücksichtigt werden, wobei  $K^2 = (1 - E(\delta_1) - E(\delta_2))^2 = (1 - 4,54 \cdot 10^{-7} - 1,26 \cdot 10^{-5})^2 \approx 1$ :

$$u_c(d)/d = \begin{cases} 2,9 \cdot 10^{-4} \\ 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ mit korrigierter Exzentrizität} \end{cases}$$

Nach der Welch-Satterthwaite-Gleichung erhält man für die kombinierte Unsicherheit ohne Korrektur der Exzentrizität einen Freiheitsgrad von 125, so dass die erweiterte Unsicherheit des Streifenabstandes  $d$  nach GUM und ohne Korrektur der Exzentrizität

$$u_{95}(d)/d = 1,984 \cdot 2,9 \cdot 10^{-4} = 5,8 \cdot 10^{-4}$$

und mit der Korrektur zu

$$u_{95}(d)/d = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ wird.}$$

Eine Übersicht des Einflusses der Beiträge zur Unsicherheit zeigt die Tabelle:

Beitrag	Wert	Einfluss in %
$u^2(r)/r^2$	$8,2 \cdot 10^{-8}$	95,8 (4,6)
$u^2(\omega)/\omega^2$	$3,0 \cdot 10^{-9}$	3,5 (80,2)
$u^2(f_D)/f_D^2$	$4,4 \cdot 10^{-10}$	0,54 (11,8)
$u^2(\delta_1)/K^2$	$1,7 \cdot 10^{-13}$	- (-)
$u^2(\delta_2)/K^2$	$1,3 \cdot 10^{-10}$	0,16 (3,4)

In Klammern ist der Einfluss nach Korrektur der Exzentrizität angezeigt.

## Ausblick

Bei der Kalibrierung von LDA-Systemen zeigt die Darstellung der Geschwindigkeit mittels einer rotierenden Scheibe eine um etwa eine Größenordnung geringere Unsicherheit als die der gemittelten Streifenabstände. Mit einer Korrekturformel bezüglich der Exzentrizität oder durch eine verbesserte Installation der Scheibe ließe sich in Zukunft noch eine weitere Verringerung der Unsicherheit erreichen. Hierzu gehört auch eine genauere Einhaltung der Winkelgeschwindigkeit. Die Grenzen der Reduzierung der Messunsicherheit von LDA-Systemen sind durch die unebenen Streifensysteme und den Transfer der bekannten Geschwindigkeit mittels bekannter oder unbekannter Streuteilchen in das Messvolumen gegeben.

## Literatur

Dopheide D: "Neue Halbleitermeßverfahren für komplexe Strömungen", Habilitationsschrift, Universität-Gesamthochschule Siegen, Mai 1995, S. 120 – 130

JCGM/WG1: Working Group 1 of the Joint Committee for Guides in: Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement, [www.bipm.org](http://www.bipm.org), 2008

Rife D.C. and Boorstyn R.B., "Single tone parameter estimation from discrete time observations", IEEE Trans. Inform. Theory, Vol 20, No. 5, pp 591-598, Sept. 1974