

Kombinierter Bias-Effekt in LDA-Messungen von Strömungen mit örtlichen Geschwindigkeitsgradienten

Zh. Zhang

Kraftwerke Oberhasli AG (KWO)
CH-3862 Innertkirchen, Schweiz
Email: zha@kwo.ch

Zusammenfassung

Die LDA-Methode zur Messung und Auswertung von turbulenten Strömungen mit örtlichen Geschwindigkeitsgradienten wurde gezeigt. Sowohl der kombinierte Effekt des Geschwindigkeitsbias also auch die gesamte Wirkung inklusive der scheinbaren Turbulenzintensität sind analysiert und quantifiziert worden. Der Geschwindigkeitsbias wird nicht mehr als die Ursache für den Fehler in der Mittelwertbildung bezeichnet. Es ist generell zwischen den mittleren Geschwindigkeiten jeweils für Impuls- und Volumenstromdichte zu unterscheiden. Einfache und praktische Methoden zur statistischen Bestimmung von Strömungsgrößen aus LDA-Messungen sind präsentiert worden.

1 Einleitung

Die LDA-Methode ist bekannt als Methode für die Messung der örtlichen Geschwindigkeit mit hoher Auflösung und kann daher für die Messung der Strömung mit örtlichen Geschwindigkeitsgradienten eingesetzt werden. Eine typische Größe des LDA-Messvolumens hat eine Dicke von 0.1 mm und eine Länge von 0.3 bis 3 mm. Wegen des kleinen Ausmaßes des Messvolumens wird die Strömung im Bereich des Messvolumens oft als gleichmäßig angenommen. Das LDA-Instrument ist meistens so ausgelegt, dass die Strömung innerhalb des Messvolumens örtlich nicht aufgelöst werden kann. Die Annahme der gleichmäßigen Strömungsverteilung innerhalb des Messvolumens ist rational, solange der Messort genügend weit von der die Strömung abgrenzenden Wand (Grenzschicht) entfernt ist und der Geschwindigkeitsgradient in den Turbulenzballen statistisch gesehen nicht vorhanden ist. In solchen Fällen muss keine Rücksicht auf die Größe des LDA-Messvolumens genommen werden.

Bei Messungen von Strömungen mit eingepprägten Geschwindigkeitsgradienten (z. B. in der Grenzschicht eines Kreisrohres) steht die Länge des LDA-Messvolumens radial quer zur Grenzschicht. Die Geschwindigkeitsverteilung sowie die Verteilung von Turbulenzgrößen in der dünnen Grenzschicht können dann nicht ohne weiteres aufgelöst werden. Die Überschätzung der mittleren Turbulenzintensität am Messort aus arithmetischer Mittelung von Messdaten ist bekannt. Basierend auf der praktischen Annahme der linearen Geschwindigkeitsverteilung innerhalb des LDA-Messvolumens darf der arithmetische Mittelwert der Geschwindigkeit in erster Linie dem Mittelpunkt des Messvolumens zugeordnet werden. Die Überschätzung der Turbulenzintensität kann dann auf einfache Weise jedoch nur zum Teil bestimmt werden [1, 2]. „Zum Teil“ deswegen, weil sämtliche Auswirkungen des Geschwindigkeitsbias nicht berücksichtigt worden sind.

Es handelt sich dabei um ein Phänomen, das durch die ungleichmäßige Ankunftsrate von Partikeln aufgrund der ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung entlang des LDA-Messvolumens entsteht. Es drückt aus, dass die Ankunftsrate von Partikeln dort hoch ist, wo

die Geschwindigkeit hoch ist. Dieses Phänomen ist vergleichbar mit jenem in turbulenten Strömungen, in welchen höhere Geschwindigkeiten häufiger erfasst werden als niedrigere. Die entsprechende Abhängigkeit in turbulenten Strömungen ist als Geschwindigkeitsbias längst bekannt [3, 4, 5]. Im vorliegenden Fall mit ungleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung entlang des LDA-Messvolumens wird das damit verbundene Phänomen ebenfalls als Geschwindigkeitsbias wegen des gleichen Entstehungsmechanismus bezeichnet. Zu erwähnen ist, dass in fast allen bisherigen LDA-Anwendungen der Geschwindigkeitsbias allgemein als eine Art Messfehler betrachtet worden ist. Wie kürzlich festgestellt wurde [6], gewährt der allgemeine Geschwindigkeitsbias (zeitlich wie auch örtlich) schlicht die Messung von Geschwindigkeitsereignissen, die für die Berechnung der mittleren Impulsstromdichte $\bar{J}_x = \rho \bar{u}_i \bar{u}$ verwendet werden:

$$\bar{u}_i = \bar{u}_{\text{bias}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \quad (1)$$

Für den Fall mit örtlich ungleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung entlang des LDA-Messvolumens wird diese Gesetzmäßigkeit in Abschnitt 3 noch gezeigt.

Die gemäß der obigen Methode berechneten Geschwindigkeitskomponenten werden in allen Impulsgleichungen wie Euler-, Navier-Stokes- und Reynolds-Gleichungen verwendet. Sie unterscheiden sich von der mittleren volumetrischen Geschwindigkeit, die im Zusammenhang mit Volumen- bzw. Massenerhaltungen steht. Da die Strömungsdynamik auf der Impuls- und Kontinuitätsgleichung basiert, muss man in der Regel unterscheiden zwischen der mittleren Geschwindigkeit, die zur Berechnung des Impulsstroms verwendet wird, und der mittleren Geschwindigkeit, die den Volumenstrom wiedergibt. Aus diesem Grund und vor allem wegen Gl. (1) wird der Geschwindigkeitsbias nicht weiter als Quelle der Messfehler betrachtet. Als ein besonderes Strömungsphänomen wird die Bezeichnung des Geschwindigkeitsbias jedoch weiter verwendet.

Aufgrund der Existenz des Geschwindigkeitsgradienten im Bereich des LDA-Messvolumens sind bei LDA-Messungen folgende zwei Wirkungen zu berücksichtigen:

- Die Wirkung, die zu scheinbarer bzw. überschätzter Turbulenzintensität führt und
- Die kombinierte Auswirkung des Geschwindigkeitsbias auf allen Strömungsgrößen.

Beim zweiten Punkt handelt es sich um zwei Formen von Geschwindigkeitsbias jeweils aufgrund der ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung und Strömungsturbulenz. Für LDA Benutzer ist es hilfreich, die jeweiligen Auswirkungen zu kennen und abzuschätzen.

Da Gl. (1) die physikalische Bedeutung des Geschwindigkeitsbias zeigt, werden im Folgenden zuerst die Begriffe der Impuls- und Energiestromdichte (der Vollständigkeit halber) kurz erläutert.

2 Impuls- und Energiestromdichte

Unabhängig vom Messverfahren können sowohl die Impuls- als auch Energiestromdichte in der Strömung mit ungleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung berechnet werden. Im Fall der Abb. 1 mit $u_x = u$ berechnet sich die mittlere Impulsstromdichte in der Richtung parallel zur x -Achse und im Bereich des LDA-Messvolumens durch

$$\bar{J}_x = \rho \frac{1}{\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} u_x^2 dz \quad (2)$$

In der Praxis ist die Impulsstromdichte oft in der Form

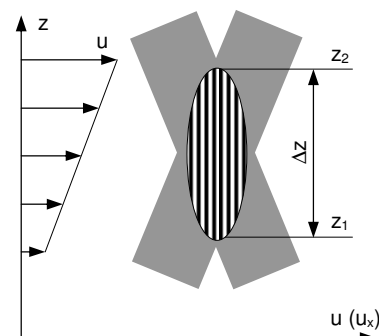


Abb. 1 LDA-Messvolumen und seine Orientierung in der Strömung mit Geschwindigkeitsgradienten

$\bar{j}_x = \rho \bar{u}_{j,x} \bar{u}_x$ geschrieben, mit \bar{u}_x als die mittlere Volumenstromdichte. Die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}_{j,x}$, die direkt mit der Impulsstromdichte verbunden ist, wird dann berechnet zu

$$\bar{u}_{j,x} = \frac{1}{\bar{u}_x \Delta z} \int_{z_1}^{z_2} u_x^2 dz \quad (3)$$

In gleicher Weise berechnet sich die Energiestromdichte in x -Richtung aus

$$\bar{E}_x = \frac{\rho}{2} \frac{1}{\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} \bar{u}^2 u_x dz \quad (4)$$

In dieser Gleichung ist \bar{u} der lokale Geschwindigkeitsvektor, bei dem $\bar{u}^2 = u^2$ gilt.

Die Energiestromdichte kann auch geschrieben werden in der Form $\bar{E}_x = \frac{1}{2} \rho \bar{u}_E^2 \cdot \bar{u}_x$. Somit ergibt sich aus Gl. (4)

$$\bar{u}_E^2 = \frac{1}{\bar{u}_x \Delta z} \int_{z_1}^{z_2} u^2 u_x dz \quad (5)$$

Nur in dem Fall, wo alle Geschwindigkeitsvektoren parallel zur x -Achse stehen, kann der Ausdruck $u^2 u_x$ unter dem Integral zu u_x^3 geschrieben werden.

Für lineare Geschwindigkeitsverteilung entlang des LDA-Messvolumens werden die genauen Berechnungen von $\bar{u}_{j,x}$ und \bar{u}_E^2 im nächsten Abschnitt gegeben.

3 Kombinierte Effekte des Geschwindigkeitsbias

Wie bekannt hat der Geschwindigkeitsbias als Strömungsphänomen seinen Ursprung in der Abhängigkeit der Partikelankunftsrate vom Betrag der Geschwindigkeit in einer turbulenten Strömung. Im vorliegenden Fall mit ungleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung im Bereich des LDA-Messvolumens ist der Geschwindigkeitsbias insbesondere durch ungleichmäßige Geschwindigkeitsereignisse entlang des LDA-Messvolumens eingepägt. Zu erwarten ist, dass mehr Geschwindigkeitsereignisse sich dort ergeben werden, wo die Strömungsgeschwindigkeit hoch ist. Als Konsequenz wird z. B. der aus Messdaten berechnete arithmetische Mittelwert der Geschwindigkeit gegenüber dem volumetrischen Mittelwert leicht zum hohen Wert verschoben.

Zur quantitativen Bestimmung der Auswirkungen des Geschwindigkeitsbias auf Messungen werden folgende Annahmen getroffen:

- 1) homogene Partikelverteilung in der Strömung;
- 2) konstante Strömrichtung der Strömung entlang der Länge des Messvolumens;
- 3) lineare Abhängigkeit der Häufigkeit der Geschwindigkeitsereignisse vom Betrag der gemessenen Geschwindigkeitskomponente;
- 4) rechteckiger Querschnitt des Messvolumens.

Aufgrund der zweiten Annahme kann der Geschwindigkeitsbias, der grundsätzlich eine Funktion der absoluten Geschwindigkeit ist, als Funktion einer proportionalen Geschwindigkeitskomponente ausgedrückt werden.

Ausgehend von den dritten und vierten Annahmen kann die Wahrscheinlichkeitsdichte der Geschwindigkeitsereignisse entlang des Messvolumens wie folgt formuliert werden

$$p_{\text{bias}} = \frac{1}{N} \frac{dN}{dz} = ku \quad (6)$$

mit N als die Anzahl der gesamten Geschwindigkeitsereignisse und dN/dz die entsprechende Verteilung entlang des Messvolumens.

Für die einfache und anschauliche Darstellungen werden in weiteren Berechnungen die gemessenen Geschwindigkeitskomponenten nach Abb. 1 als u anstatt u_x bezeichnet. Somit können zusätzliche Subskripte zur Bezeichnung der scheinbaren Turbulenz und der Effekte des Geschwindigkeitsbias ohne weiteres verwendet werden.

Die Konstante k in obiger Gleichung berechnet sich aus der Bedingung $\int p_{\text{bias}} dz = 1$ mit $\Delta z = z_2 - z_1$ zu

$$k = \frac{1}{\bar{u} \Delta z} \quad (7)$$

Im Grunde genommen gilt die Wahrscheinlichkeitsdichte nach Gl. (6) nur für $u > 0$, die in der Regel für geringe Turbulenzintensität ($Tu < 0.5$) erfüllt ist [7].

Die Geschwindigkeitsverteilung längs des Messvolumens wird auf folgender linearer Abhängigkeit nach Abb. 1 angenommen:

$$u(z) = \hat{u}(z) + u'(z) = \bar{u} - \frac{1}{2} a(z_1 + z_2 - 2z) + u'(z) \quad (8)$$

Die Strömung ist somit als Überlagerung der zeitlich gemittelten linearen Geschwindigkeitsverteilung \hat{u} entlang des Messvolumens durch zufällige Geschwindigkeitsschwankungen erfasst worden. Dabei ist a der Geschwindigkeitsgradient und $\bar{u} = \frac{1}{2}(\hat{u}_1 + \hat{u}_2)$ die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit in der Mitte des Messvolumens. Die zufallsabhängige Geschwindigkeitsschwankung heißt zugleich, dass jedes Geschwindigkeitsereignis zufällig einem z -Wert zugeordnet wird.

3.1 Mittelwert der Geschwindigkeit

Aus direkter Datenverarbeitung ohne Verwendung jeglicher Gewichtung repräsentiert der arithmetische Mittelwert der Geschwindigkeit nach Gl. (1) einen Mittelwert, der vom Geschwindigkeitsbias beeinflusst wird. Die Summationsberechnung in Gl. (1) kann wie folgt in die Integralberechnung umgewandelt werden

$$\bar{u}_{\text{bias}} = \int_{z_1}^{z_2} p_{\text{bias}} u dz = \frac{1}{\bar{u} \Delta z} \int_{z_1}^{z_2} u^2 dz \quad (9)$$

Da die Integration auf der rechten Seite dieser Gleichung komplett gleich der Gl. (3) ist, ist somit $\bar{u}_j = \bar{u}_{\text{bias}}$ in Gl. (1) validiert worden.

Bei der Berechnung des Integrals mit u aus Gl. (8) verschwinden alle Terme mit ungeraden Exponenten in der Geschwindigkeitsschwankung (u') wegen deren stochastischen Eigenschaft. Man erhält dann aus Gl. (9) mit $\bar{u}_j = \bar{u}_{\text{bias}}$

$$\bar{u}_j \bar{u} = \bar{u}^2 + \frac{1}{12} a^2 (\Delta z)^2 + \overline{u'^2} \quad (10)$$

Wegen $a \Delta z = \hat{u}_2 - \hat{u}_1 = \Delta \hat{u}$ und $\sigma = \sqrt{\overline{u'^2}}$ als Standardabweichung lässt sich Gl. (10) weiter schreiben als

$$\bar{u}_j \bar{u} = \bar{u}^2 + \frac{1}{12} (\Delta \hat{u})^2 + \sigma^2 \quad (11)$$

In der Praxis wird zur Berechnung der mittleren Impulsstromdichte der Korrekturfaktor β verwendet, um die mittlere Geschwindigkeit \bar{u}_j in Form von $\bar{u}_j = \beta \bar{u}$ darzustellen. Aus Gl. (11) folgt dann

$$\beta = \frac{\bar{u}_j}{\bar{u}} = 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta \hat{u}}{\bar{u}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\bar{u}} \right)^2 \quad (12)$$

Sie stellt eine Korrekturgröße dar, die grösser als Eins ist.

Ein spezieller Fall wird erhalten, wenn die Strömung keinen Geschwindigkeitsgradienten aufweist. Wegen $a = 0$ und daher $\Delta\hat{u} = 0$ ergibt sich aus Gl. (12)

$$\beta = (1 + Tu^2) \quad (13)$$

Die Verwendung der Turbulenzintensität in der Form $Tu^2 = \sigma^2/\bar{u}^2$ ist hier nur gültig, wenn die Geschwindigkeitskomponente u etwa die Hauptströmung darstellt.

Gl. (10) sowie Gl. (11) berücksichtigen Auswirkungen des Geschwindigkeitsbias sowohl im Aspekt der Strömungsturbulenz als auch im Aspekt der ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung entlang des Messvolumens. Bei Strömungen mit großen Geschwindigkeitsgradienten innerhalb des LDA-Messvolumens kann der Geschwindigkeitsbias den Term $\frac{1}{12}(\Delta\hat{u}/\bar{u})^2$ in Gl. (12) so groß machen, dass beide Mittelwerte \bar{u}_j und \bar{u} sich deutlich unterscheiden.

Die mittlere Geschwindigkeit \bar{u}_j für Impulsstromdichte wird durch Gl. (3) ausgehend von der Definition berechnet. Es soll nicht erwartet werden, dass dieser Wert aus dem arithmetischen Mittel von Messdaten u_i^2 sich ergeben kann. Dies zeigt sich aus folgender Berechnung mit der Geschwindigkeitskomponente u :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^2 = \int_{z_1}^{z_2} p_{\text{bias}} u^2 dz = \frac{1}{\bar{u} \Delta z} \int_{z_1}^{z_2} u^3 dz = \frac{2\bar{E}_u}{\rho \bar{u}} \quad (14)$$

Offensichtlich resultiert dabei eine Strömungsgröße, die der Energiestromdichte proportional ist (wenn die Hauptstromrichtung mit der Geschwindigkeitskomponente u übereinstimmt):

$$\bar{E}_u = \frac{\rho}{2} \frac{1}{\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} u^3 dz \quad (15)$$

Man vergleiche sie mit Gl. (4).

Andererseits kann die Energiestromdichte als Produkt der spezifischen Energie $\rho/2 \cdot \overline{u_E^2}$ und der Volumenstromdichte \bar{u} in der Form $\bar{E} = \rho/2 \cdot \overline{u_E^2} \cdot \bar{u}$ dargestellt werden. Somit erhält man

$$\overline{u_E^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^2 = \frac{1}{\bar{u} \Delta z} \int_{z_1}^{z_2} u^3 dz \quad (16)$$

Die Geschwindigkeit unter dem Integral wird durch Gl. (8) ersetzt. Da alle Glieder mit ungeraden Exponenten der Geschwindigkeitsschwankung (u') bei der Integralberechnung verschwinden müssen, erhält man schlussendlich

$$\overline{u_E^2} = \bar{u}^2 + \frac{1}{4}(\Delta\hat{u})^2 + 3\sigma^2 \quad (17)$$

Wie die Verwendung des Korrekturfaktors für die Impulsstromdichte wird hier der Korrekturfaktor für die Energiestromdichte verwendet, um $\overline{u_E^2}$ mit der Volumenstromdichte zu verbinden:

$$\overline{u_E^2} = \alpha \bar{u}^2 \quad (18)$$

Der Korrekturfaktor α berechnet sich aus Gl. (17) zu

$$\alpha = \frac{\overline{u_E^2}}{\bar{u}^2} = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta\hat{u}}{\bar{u}} \right)^2 + 3 \frac{\sigma^2}{\bar{u}^2} \quad (19)$$

Sie ist grösser als Eins.

Um den volumetrischen Mittelwert der Geschwindigkeit \bar{u} zu bestimmen, werden Gln. (12) und (19) zur Eliminierung von $\Delta\hat{u}$ kombiniert. Daraus ergibt sich zuerst

$$3\frac{\bar{u}_J}{\bar{u}} - \frac{\bar{u}_E^2}{\bar{u}^2} = 2 \quad \text{bzw.} \quad 3\beta - \alpha = 2 \quad (20)$$

Die mittlere Geschwindigkeit \bar{u} ist dann berechnet zu

$$\bar{u} = \frac{1}{4} \left(3\bar{u}_J + \sqrt{9\bar{u}_J^2 - 8\bar{u}_E^2} \right) \quad (21)$$

Es zeigt sich, dass dazu weder die Länge des LDA-Messvolumens noch die Geschwindigkeitsverteilung bekannt sein müssen. Eine weitere äquivalente Bestimmungsgleichung wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

3.2 Turbulente Normalspannung

Etwas komplizierter ist die Bestimmung von Turbulenzgrößen unter dem Einfluss der ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung längs des LDA-Messvolumens. Zum einen hat eine derartige Geschwindigkeitsverteilung die scheinbare Turbulenz zur Folge, wenn sie aus dem arithmetischen Mittel von Messdaten berechnet wird. Zweitens bewirken die ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung und die Strömungsturbulenz den kombinierten Geschwindigkeitsbias.

Ausgehend von der Definition wird die scheinbare (in Englisch *apparent*) und biasbehaftete turbulente Normalspannung in der Geschwindigkeitskomponente u durch direkte Datenauswertung aus LDA-Messungen wie folgt berechnet

$$\overline{u_{\text{app,bias}}'^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u}_J)^2 \quad (22)$$

Sie ist als scheinbare Normalspannung bezeichnet, weil unter der Summation jede Geschwindigkeitsdifferenz $u_i - \bar{u}_J$ die scheinbare Geschwindigkeitsschwankung darstellt. Wie im letzten Abschnitt zur Berechnung von \bar{u}_J kann die Summationsberechnung in obiger Gleichung in die Integration konvertiert werden. Dazu wird die Wahrscheinlichkeitsdichte nach Gl. (6) mit $k = 1/(\bar{u}\Delta z)$ wieder verwendet. Es ergibt sich dann

$$\overline{u_{\text{app,bias}}'^2} = \int_{z_1}^{z_2} p_{\text{bias}} (u - \bar{u}_J)^2 dz = \frac{1}{\bar{u}\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} u (u - \bar{u}_J)^2 dz \quad (23)$$

Die Geschwindigkeitskomponente u ist nach Gl. (8) einzusetzen. Beim Ausführen der Integration verschwinden alle Terme mit u' und u'^3 aufgrund der zufallabhängigen Geschwindigkeitsschwankung. Somit erhält man

$$\overline{u_{\text{app,bias}}'^2} = (\bar{u} - \bar{u}_J)^2 + \frac{1}{12} \left(3 - 2\frac{\bar{u}_J}{\bar{u}} \right) (\Delta\hat{u})^2 + \left(3 - 2\frac{\bar{u}_J}{\bar{u}} \right) \overline{u'^2} \quad (24)$$

Diese Gleichung wird mit Gl. (11) kombiniert, um den Term $\overline{u'^2}$ zu eliminieren. Daraus folgt

$$\overline{u_{\text{app,bias}}'^2} = (2\bar{u} - \bar{u}_J)(\bar{u}_J - \bar{u}) \quad (25)$$

Der volumetrische Mittelwert der Geschwindigkeit wird dann berechnet zu

$$\bar{u} = \frac{1}{4} \left(3\bar{u}_J + \sqrt{\bar{u}_J^2 - 8\overline{u_{\text{app,bias}}'^2}} \right) \quad (26)$$

Diese Gleichung repräsentiert eine weitere einfache Möglichkeit zur Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} und ist vollkommen äquivalent zur Gl. (21).

Die tatsächliche turbulente Normalspannung wird dann berechnet aus Gl. (11) zu

$$\overline{u'^2} = \left(\frac{\bar{u}_j}{\bar{u}} - 1 \right) \bar{u}^2 - \frac{1}{12} (\Delta \hat{u})^2 \quad (27)$$

oder weiter mit $\Delta \hat{u} = a \Delta z$ und $\beta = \bar{u}_j / \bar{u}$ zu

$$\overline{u'^2} = (\beta - 1) \bar{u}^2 - \frac{1}{12} a^2 (\Delta z)^2 \quad (28)$$

In diesen letzten zwei Gleichungen gilt die mittlere Geschwindigkeit \bar{u}_j nach Gl. (1) als bekannt. Der mittlere volumetrische Mittelwert der Geschwindigkeit lässt sich aus Gl. (21) bzw. (26) berechnen.

Gl. (25) wird weiter berücksichtigt. Die Geschwindigkeitsdifferenz $(\bar{u}_j - \bar{u})$ in der Gleichung wird durch Gl. (11) ersetzt. Daraus folgt

$$\overline{u'^2_{app,bias}} = \left(2 - \frac{\bar{u}_j}{\bar{u}} \right) \left(\frac{1}{12} (\Delta \hat{u})^2 + \overline{u'^2} \right) \quad (29)$$

Der zweite Klammerausdruck in dieser Gleichung repräsentiert die scheinbare turbulente Normalspannung $\overline{u'^2_{app,0}}$ ohne Berücksichtigung des Geschwindigkeitsbias, siehe z. B. [1]. Somit kann auch geschrieben werden

$$\overline{u'^2_{app,bias}} = \left(2 - \frac{\bar{u}_j}{\bar{u}} \right) \cdot \overline{u'^2_{app,0}} \quad (30)$$

Der Klammerausdruck in dieser Gleichung stellt somit den Biaseinflussfaktor dar, wenn aus Gl. (22) berechnet wird.

Aus dem Vergleich mit Gl. (25) erhält man zusätzlich

$$\overline{u'^2_{app,0}} = \bar{u} (\bar{u}_j - \bar{u}) \quad (31)$$

Gl. (29) wird weiter mit Gl. (27) zur Eliminierung von \bar{u}_j / \bar{u} kombiniert. Daraus ergibt sich

$$\frac{\overline{u'^2_{app,bias}}}{\bar{u}^2} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \frac{(\Delta \hat{u})^2}{\bar{u}^2} - \frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}^2} \right)^2 \quad (32)$$

Abb. 2 zeigt die entsprechende Abhängigkeit von der Turbulenzintensität für verschiedene Fälle mit ungleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung längs des LDA-Messvolumens. Jede Abweichung der Kurven von der Gerade mit einer Steigung von 1 zu 1 stellt die Gesamtwirkung von scheinbarer Turbulenz und kombiniertem Geschwindigkeitsbias dar. Offenbar ist der Betrag der scheinbaren Turbulenz infolge der ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung nicht wesentlich und kann meistens vernachlässigt werden.

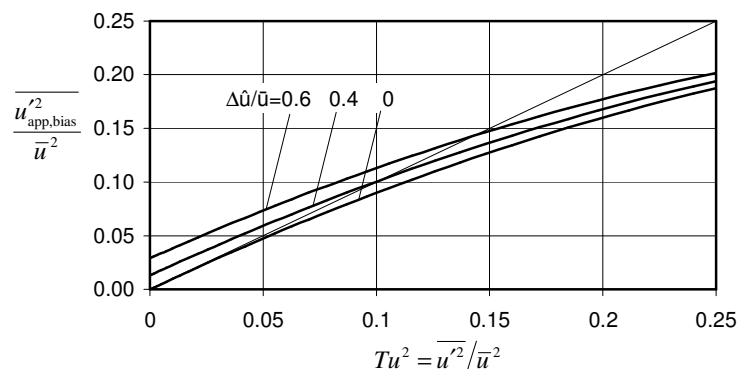


Abb. 2 Scheinbare und biasbehaftete turbulente Normalspannung

Insbesondere für $\Delta\hat{u} = 0$ ergibt sich aus Gl. (29) direkt

$$\overline{u'_{\text{bias}}{}^2} = \left(2 - \frac{\overline{u_1}}{u}\right) \cdot \overline{u'^2} = (2 - \beta) \cdot \overline{u'^2} \quad (33)$$

und weiter wegen Gl. (13)

$$\overline{u'_{\text{bias}}{}^2} = (1 - Tu^2) \cdot \overline{u'^2} \quad (34)$$

Es zeigt sich, dass die turbulente Normalspannung kleiner als die Normalspannung ohne Einfluss des Geschwindigkeitsbias ist. Dieses Ergebnis stimmt mit den bekannten Ergebnissen in [4, 5] überein.

Es soll nochmals darauf hingewiesen werden, dass die obigen Betrachtungen auf der Annahme von Gl. (6) beruhen, welche nur für $Tu < 50\%$ gilt.

4 Zusammenfassung

Das Vorhandensein des örtlichen Geschwindigkeitsgradienten in einer Strömung beeinflusst LDA-Messungen in einem komplexen Mechanismus. Neben der Überschätzung der Turbulenzintensität tritt der kombinierte Effekt des Geschwindigkeitsbias auf. Es hat sich gezeigt, dass der Geschwindigkeitsbias als ein Strömungsphänomen generell nicht weiter als Ursache für den Fehler in der Mittelwertbildung bezeichnet werden kann. Die biasbehaftete Geschwindigkeit aus arithmetischer Mittelung stellt den Mittelwert dar, der für die Bestimmung der Impulsstromdichte und daher für die Lösung von Impulsgleichungen relevant ist. Der kombinierte Effekt des Geschwindigkeitsbias ergibt sich aus örtlich ungleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung längs des LDA-Messvolumens und zeitlich stochastischen Geschwindigkeitsschwankungen (Turbulenz). Aus Untersuchungen konnte die scheinbare und reale Turbulenzintensität sowie Bestandteile des kombinierten Geschwindigkeitsbias separat quantifiziert werden. Die Rechenergebnisse können somit verwendet werden, um jeweilige Einflüsse in der Mittelwertbildung abzuschätzen.

Referenzen

- [1] Albrecht H., Borys M., Damaschke N., Tropea C. (2003): Laser Doppler and phase Doppler measurement techniques. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
- [2] Durst F., Martinuzzi R., Sender J., Thevenin D. (1992): LDA-measurements of mean velocity, rms-values and higher order moments of turbulence intensity fluctuations in flow fields with strong velocity gradients. 6th int. Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, p5.1
- [3] McLaughlin DK., Tiederman WG. (1973): Biasing correction for individual realization of laser anemometer measurements in turbulent flows. Phys. of Fluids, Vol. 16, No. 12, p2082-2088
- [4] Nobach H. (1998): Verarbeitung stochastisch abgetasteter Signale - Anwendung in der Laser-Doppler-Anemometrie. Diss., Univ. Rostock, Shaker Verlag, Aachen
- [5] Zhang Zh. (2002): Velocity bias in LDA measurements and its dependence on the flow turbulence. J. Flow Measurement and Instrumentation 13, p63-68
- [6] Zhang Zh. (2010): LDA application methods, Springer Verlag
- [7] Zhang Zh. (2010): Privatkommunikation