

WELLEN UND WELLENATTRAKTOREN IN EINER KUGELSCHALE MIT ZEITLICH MODULIRTER ROTATION

WAVE-ATTRACTORS AND WAVES IN A SPHERICAL SHELL WITH TIME- MODULATED ROTATION

S. Koch¹, U. Harlander¹, R. Hollerbach², A. Rabitti³, L.R.M. Maas³, C. Egbers¹

¹ Lehrstuhl für Aerodynamik und Strömungslehre, BTU Cottbus, Postfach 101344 Cottbus

² Department of Applied Mathematics, University of Leeds, Leeds LS2 9JT, U.K.

³ Netherlands Institute for Sea Research (NIOZ) Department of Physical Oceanography, Texel (NL)

E-Mail: sandy.koch@tu-cottbus.de – Homepage: <http://www.tu-cottbus.de/LAS>

Trägheitswellen, Wellenattraktoren, Taylor-Couette-Strömung, Kugelschale
inertial waves, wave attractors, rotation, modulation, Taylor-Couette-Flow, spherical shell

Zusammenfassung

In diesem Beitrag werden interne Wellen und Wellenattraktoren in verschiedenen geometrischen Systemen vorgestellt, mit besonderem Augenmerk auf die Entstehung und Entwicklung von Wellenattraktoren in einer Kugelschale. Experimentell wurden Wellenattraktoren schon vor einigen Jahren in Tank- und Zylinderexperimenten dokumentiert. Numerische Untersuchungen dazu folgten und Attraktoren wurden für die sphärische Geometrie numerisch nachgewiesen. Das hier vorgestellte Kugelspaltexperiment, als erstes Experiment in der sphärischen Geometrie zur Untersuchung von Trägheitswellenattraktoren, besteht aus zwei rotierenden konzentrisch angeordneten Kugelschalen. Durch eine Modulation der Rotationsgeschwindigkeit in Form einer Sinus-Kurve werden Wellen erzeugt, die an den gekrümmten Rändern des Modells mehrfach reflektiert werden und somit bestimmten Bahnen folgen. Ein erster Ansatz, Wellenattraktoren mittels Laser-Doppler-Anemometrie in einem Tankexperiment nachzuweisen wird angeführt. Untersucht wird dabei das Geschwindigkeitsprofil senkrecht zum Wellenattraktor.

Für experimentelle Untersuchungen der Attraktoren in der sphärischen Geometrie steht am Lehrstuhl für Aerodynamik und Strömungslehre der BTU Cottbus ein Kugelspaltexperiment zur Verfügung, welches hier beschrieben wird. Zudem werden erste numerische Ergebnisse von Rainer Hollerbach zu diesem Experiment vorgestellt.

Einleitung

Wellen sind Bestandteil von vielen Prozessen in großskaligen Zirkulationen, wie sie in der Atmosphäre, den Ozeanen oder dem flüssigen äußeren Erdkern auftreten. Sie sind gekennzeichnet durch periodische Bewegungen und transportieren Impuls, den sie lokal abgeben können. Durch diesen Prozess entstehen langsam variierende Strömungen, die Grundströmungen genannt werden (Bühler 1998). In rotierenden Systemen spielen die dabei angeregten Trägheitswellen eine entscheidende Rolle. Diese Wellen entstehen durch das Wechselspiel zwischen Trägheit und Coriolis-Kraft. Werden diese Wellen an gekrümmten Grenzflächen, wie zum Beispiel einer Kugelschale, mehrfach reflektiert, folgen diese Wellenstrahlen bestimmten Pfaden, den sogenannten Wellenattraktoren wie sie Tilgner (2007) beschreibt. Im Allgemeinen weisen diese auf Grenzschichten hin, die sich von der Grenzfläche ablösen.

Für homogene Flüssigkeiten sind interne Grenzschichten vom Wellenattraktortyp erst seit 10 Jahren experimentell bestätigt (Maas 2001).

Numerische Simulationen und Laborexperimente können helfen, noch offene Fragen zu beantworten. Für den Vergleich mit numerischen Untersuchungen werden verschiedene Visualisierungen wie das Synthetik-Schlieren-Verfahren, entwickelt von Sutherland (1999), und die Laser-Doppler-Anemometrie als Messtechnik, angewandt.

Erste LDA-Messungen am Attraktor

Am Royal Netherlands Institute for Sea Research (NIOZ) in Texel (NL) in der Arbeitsgruppe für Physikalische Ozeanografie von Prof. Leo Maas konnten erste Messungen am Attraktor mit dem LDA-Messgerät Flow-Light (LAS, BTU Cottbus) an einem Tank-Experiment durchgeführt werden. Das Experimentaufbau, mit dem Untersuchungsraum und dem LDA-Systemaufbau ist in Abbildung 2 gezeigt.

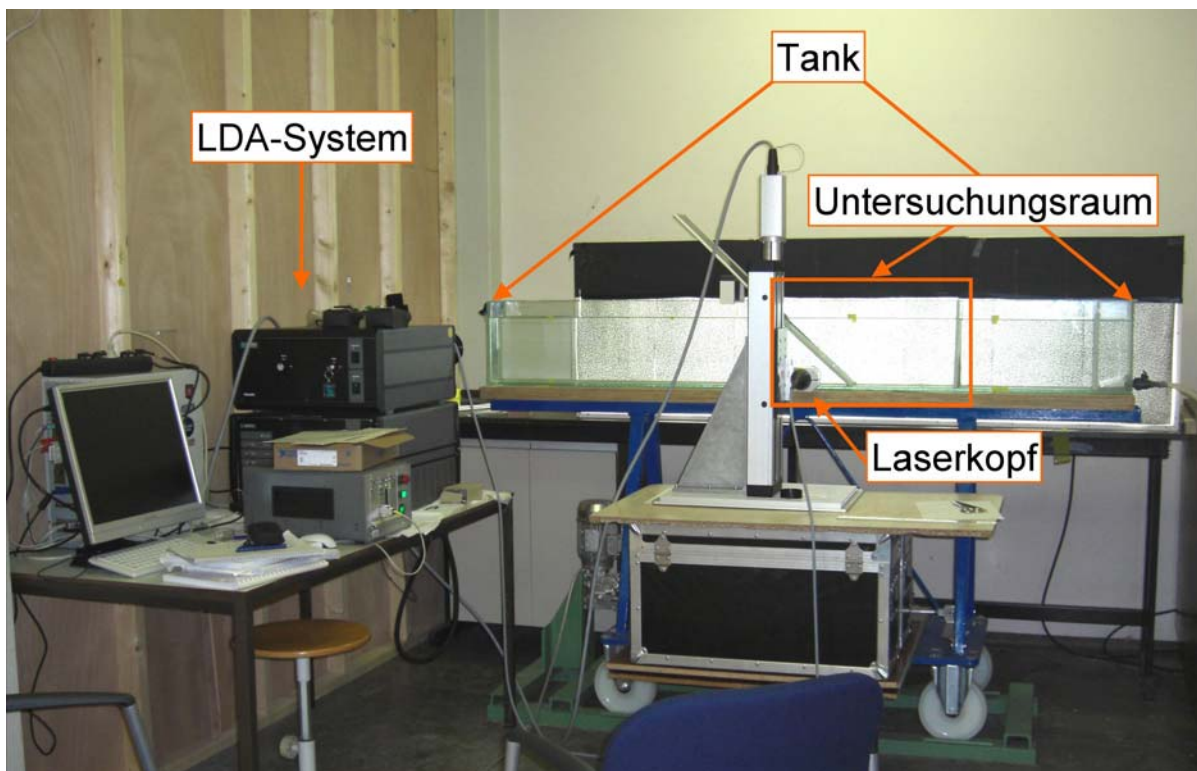


Abb. 2: Experimentaufbau für die Erzeugung von Wellenattraktoren am NIOZ in der Niederlande mit dem LDA-FlowLight-System vom LAS, BTU Cottbus.

Der Tank ist mit einer geschichteten Salzflüssigkeit gefüllt und steht auf einem rollenden Tisch, der von einem Motor periodisch hin und her bewegt wird. Durch diese Bewegung werden interne Wellen angeregt, die an den Wänden des Tanks reflektiert werden und nach mehrmaliger Reflektion bestimmten Bahnen folgen. Die genauen Frequenzangaben bestimmen dabei die Ausbildung und das Aussehen eines Attraktors.

In Abbildung 3 A) ist der Untersuchungsraum des Tanks mit der schrägen Wand zu sehen. Als Skizze ist hier ein Attraktor mit einem Messpunkt eingezeichnet bei einer Anregungsfrequenz mit $\omega = 1,42 \text{ rad/sec}$. Mit Hilfe des LDAs wird die Geschwindigkeit der zugesetzten Partikel am Attraktor senkrecht zu einem Pfad gemessen. In Abbildung 3 B) sind die gekreuzten Laserstrahlen an dem Messpunkt eines Pfades zu erkennen.

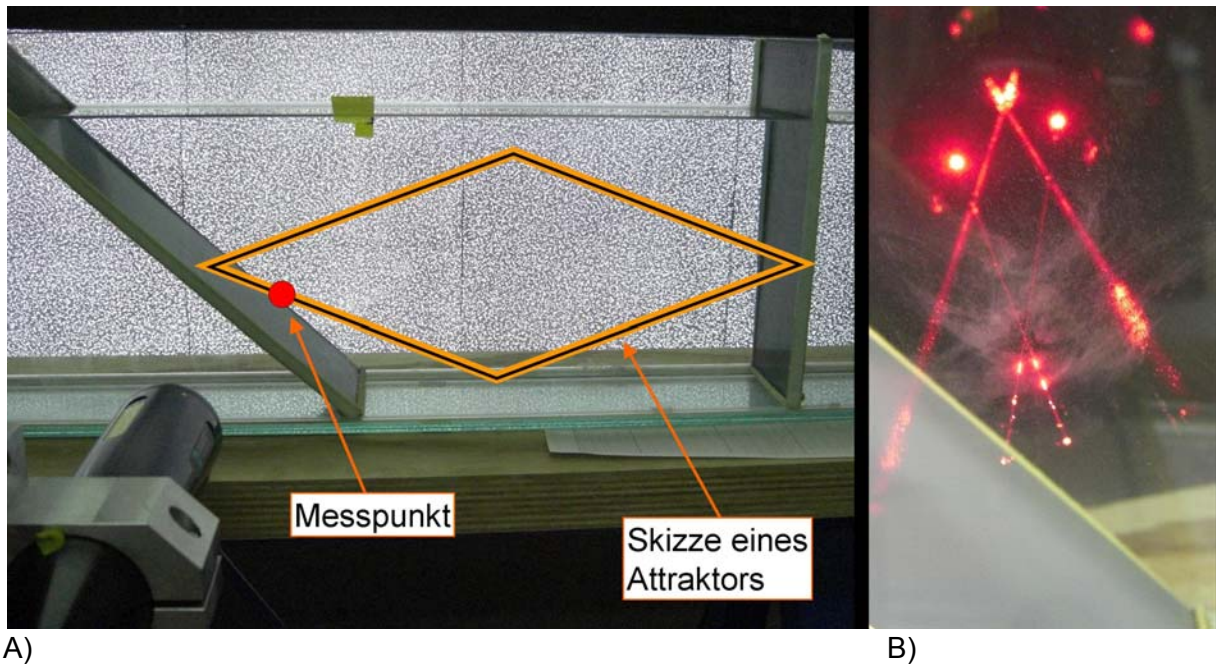


Abb. 3: A) Untersuchungsraum des Experiments mit der Skizze eines Attraktors und einem eingezeichnetem Messpunkt. B) gekreuzte Laserstrahlen in der Partikelwolke während einer Messung.

Es wurden verschiedene Messpunkte für die Untersuchung der Attraktoren ausgewählt, um einen Überblick über die Geschwindigkeitsverteilungen an den Attraktoren-Pfaden zu erhalten. Zusätzlich wurden verschiedene Attraktoren durch unterschiedliche Anregungsfrequenzen erzeugt und vermessen. Untersucht wurde weiterhin deren Anregungsdauer bei dem Zuschalten der Anregungsfrequenz und Lebensdauer nach dem Abschalten der Anregungsfrequenz.

Für die optische Visualisierung der Attraktoren in der geschichteten Flüssigkeit kam das sogenannte Synthetik-Schlieren-Verfahren zum Einsatz. Das Messverfahren wurde für die Sichtbarmachung von Strömungen in Flüssigkeiten mit unterschiedlichen Brechungsindizes von Sutherland et. al 1999 erstmals vorgeschlagen. Bei diesem Visualisierungsverfahren wird eine Kamera auf das Strömungsfeld gerichtet, bei der sich im Hintergrund ein beleuchtetes Bildmuster, wie es in Abbildung 3 A) zu sehen ist, befindet. Durch die Variation der Brechungsindexe wird das Licht innerhalb der Strömung unterschiedlich gebrochen, was zu einer Verzerrung des Bildmusters führt, welches von der Kamera aufgenommen wird. Bestimmte Pattern-Matching-Algorithmen können diese Verzerrung der Bilder messen und daraus ein qualitatives Dichtefeld der Strömung berechnen. Die Attraktoräste, an denen sich die Partikel der Flüssigkeit fokussieren, werden nun durch ihre höhere Dichte sichtbar.

Eine weitere Verbesserung der Darstellung des Attraktors ist es, ein Messbild von einem Nullbild abzuziehen, wie in Abbildung 4 zu sehen ist, um Veränderungen im Messbild hervorzuheben. Der eingezeichnete Rahmen zeigt den Untersuchungsraum des Tanks mit der schrägen Wand.



Abb. 4: Darstellung eines Wellenattraktor nach dem Synthetik-Schlieren-Verfahren.

In Abbildung 5 ist eine typische Geschwindigkeitszeitreihe bei einer Anregungsfrequenz von $\omega = 1,42 \text{ rad/sec}$ innerhalb eines Attraktors gezeigt. Die Teilchen bewegen sich mit der Wellenfrequenz periodisch in Richtung des Attraktorenastes. Auch innerhalb des Attraktors ist die Bewegung regulär. Daraus lässt sich schließen, dass die Amplitude der Bewegung noch klein genug ist für eine lineare Beschreibung.

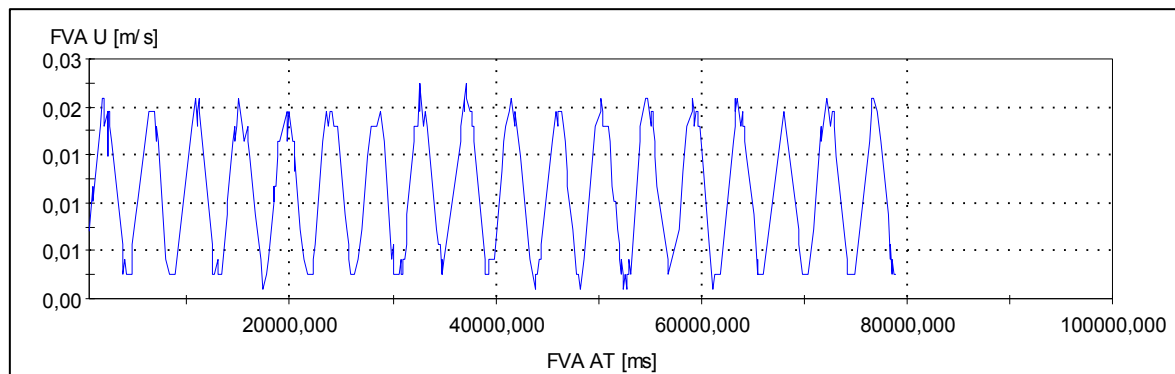


Abb. 5: LDA-Messbild der Geschwindigkeitsverteilung eines Wellenattraktors bei einer Anregungsfrequenz $\omega = 1,42 \text{ rad/sec}$ über einen Messzeitraum von 80 Sekunden.

Laborexperiment in sphärischer Geometrie

Viele geophysikalische Anwendungen mit planetaren Skalen motivieren den Einsatz von sphärischen Geometrien. Mit dem Kugelspaltexperiment an der BTU Cottbus wird die Anregung und Ausbildung der Wellenattraktoren sowie der internen Grenzschichten untersucht. Dies liefert wesentliche Informationen über die Dynamik der Flüssigkeit.

Das Laborexperiment besteht aus einer Innen- und Außenkugelschale mit einem Radienverhältnis von $\eta = 0,5$, bei einem Innenkugelradius von $r_i = 60 \text{ mm}$ und Außenkugelradius von $r_a = 120 \text{ mm}$. Der Spalt stellt den Untersuchungsraum dar und ist mit dem niedrig-viskosen Öl Ak 0.65 mit einer dynamischen Viskosität von $\nu = 0,65 \text{ mm}^2\text{s}^{-1}$ gefüllt. Der Aufbau des Experimentes ist in Abbildung 6 dargestellt.

Die Rotation der Kugelschalen in Form einer Sinus-Kurve bewirkt, dass die Teilchen in der Flüssigkeit aus ihrer Ruhelage ausgelenkt werden. Die Corioliskraft treibt die Teilchen in ihre Ausgangsposition zurück, wobei es auf Grund ihrer Trägheit zu einem Überschießen kommt. Dieser Ablauf führt zu einer Oszillation und internen Wellen entstehen.



Abb. 6: Aufbau des Laborexperiments für den Nachweis von Wellenattraktoren in der sphärischen Geometrie.

Das Experiment wird durch zwei dimensionslose Kennzahlen bestimmt, die Rossby-Zahl (Ro) und die Ekman-Zahl (Ek). Darüber hinaus kann die Anregung der internen Wellen durch die Amplitude und die Frequenz der Rotationsmodulation sowie der Viskosität kontrolliert werden.

Die Formel für die Modulationsrotation lautet:

$$\Omega(t) = \Omega_0 (1 + \varepsilon \sin[\omega t]), \quad \omega < \Omega_0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1)$$

Die Ekman-Zahl ist definiert als

$$Ek = \nu / (\Omega d^2) \quad (2)$$

und erreicht einen ausführbaren Bereich im Experiment von $1.72 \cdot 10^{-3} < Ek < 5.75 \cdot 10^{-6}$.

Die Rossby-Zahl ist definiert als:

$$Ro = U / (\Omega_0 d), \quad (3)$$

mit der charakteristischen Geschwindigkeit $U = d\Omega_0\varepsilon$ welche dadurch in einem Bereich von $0,2 < Ro < 1,8$ liegt.

Numerische Vorarbeiten

Tilgner zeigte schon 1997 und 2007 in seinen numerischen Simulationen, dass in schnell rotierenden sphärischen Kugelschalen Attraktoren entstehen und ebenso zwei Attraktoren bei bestimmten Frequenzen koexistieren können. Dargestellt sind solche einfachen Attraktoren in Abbildung 7 für unterschiedliche Anregungsfrequenzen. Weiterhin zeigte er für abnehmende Kugelinnenradien, dass die Anzahl der Wellenattraktoren ebenfalls abnimmt und dass in einer Vollkugel keine Attraktoren bestehen können.

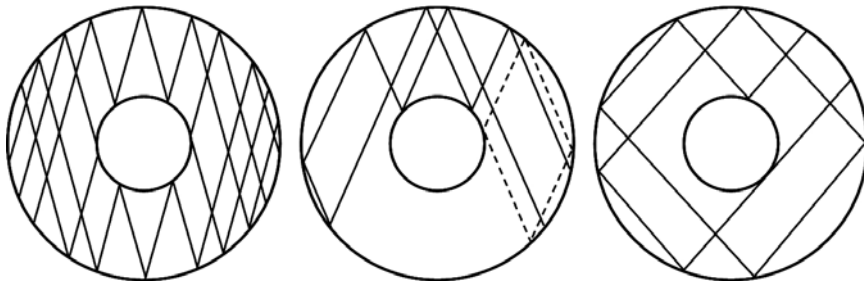


Abb. 7: Attraktoren von Strahlen in einer Kugelschale mit vertikaler Rotationsachse mit $r_i/r_o = 0.35$ für $\omega = 0.532$ (links), $\omega = 0.81$ (Mitte, die gestrichelte Linie zeigt einen zweiten Attraktor) und $\omega = 1.322$ (rechts) [5]

Erste numerische Rechnungen von Rainer Hollerbach 2010 für die Geometrie des Kugelspaltexperimentes bei $Ek = 10^{-5}$ für unterschiedliche Frequenzen zeigen sehr gute Ergebnisse für die Existenz von Wellenattraktoren. Abbildung 8 zeigt diese für die Anregungsfrequenzen $\omega = 1.885$, $\omega = 5.655$ und $\omega = 8.796$.

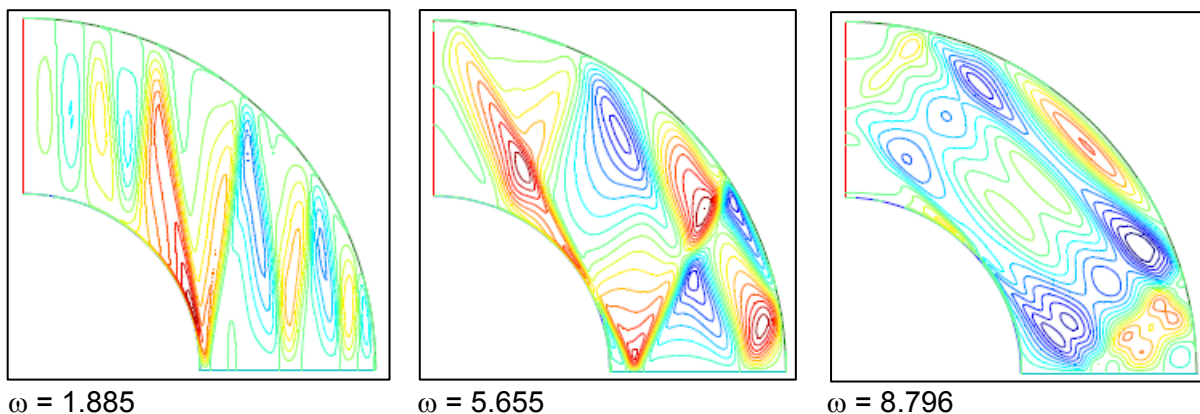


Abb. 8: Erste numerische Ergebnisse von Rainer Hollerbach zum Kugelspaltexperiment; $Ek = 10^{-5}$, für die Anregungsfrequenzen $\omega = 1.885$, $\omega = 5.655$ und $\omega = 8.796$.

Zusammenfassung und Ausblick

Attraktoren, hervorgerufen durch interne Wellen, wurden bereits in verschiedenen Geometrien experimentell und numerisch bestätigt.

Erste Tests am Kugelspaltexperiment mit kleinen zeitmodulierten Frequenzen haben bereits gezeigt, dass sich vertikale interne Wellen anregen lassen. Der nächste Schritt wird sein, die Anregungsfrequenzen zu erhöhen, um interne Wellen zu generieren, die durch mehrfache Reflektionen an den Kugelschalen zu dann Attraktoren fokussieren.

Literatur

Maas, L.R.M., 2001: „Wave focusing and ensuing mean flow due to symmetry breaking in rotating fluids“, J. Fluid Mech., Vol. 437, pp. 13-28

Harlander, U., Maas, L.R.M., 2007: „Internal boundary layers in a well-mixed equatorial atmosphere“, Dynamics of Atmospheres and Oceans, Vol. 44, pp. 1-28

Tilgner, A., 2007: „Zonal Wind Driven by Inertial Modes“, Phys. Rev. Letters, Vol. 99, 194501

Tilgner, A., 1997: „Driven inertial oscillations in spherical shells“ Phys. Rev., Vol. 59, No. 2

Bühler, O., McIntyre, M. E., 1998: „On non-dissipative wave–mean interactions in the atmosphere or oceans“, Journal of Fluid Mechanics, 354:301-343

Sutherland, B. R., Dalziel, S. B., Hughes, G. O, Linden, F., 1999: "Visualization and measurement of internal waves by 'synthetic schlieren'. Part 1. Vertically oscillating cylinder", J. Fluid Mech., Vol. 390, pp. 93-126

Hollerbach, R., 2010: Erste numerische Ergebnisse mit oszillierender Innenkugel entsprechend zum Kugespaltexperiment an der BTU Cottbus, Department of Applied Mathematics, University of Leeds