

QUASI-3D-PARTICLE-IMAGE-VELOCIMETRY VON POLWIRBELN IN WEITEN SPHÄRISCHEN SPALTEN

Antje Brucks, Bernd Sitte

Zentrum für angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation (ZARM), Universität Bremen, Am Fallturm, D – 28359 Bremen

Abstract

Die experimentelle Untersuchung der natürlichen, thermisch getriebenen Konvektion ist sowohl von ingenieurwissenschaftlichem als auch geophysikalischem Interesse. Unter dem Einfluss der Erdgravitation setzt bei einer infinitesimal kleinen Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Außenkugel eine Konvektionsströmung ein. Die axialsymmetrische, stationäre Primärströmung zirkuliert im Bereich der instabilen Schichtung. Bei hinreichend großem, thermischen Antrieb wird die konvektive Primärströmung instabil. Analog zu den Strömungsverhältnissen im äußeren Erdkern ist der Grenzfall $a_{zf} \gg g$ von Interesse.

Die erste, symmetriebrechende Instabilität durch Erhöhung der Rotationsrate ist bisher jedoch noch nicht untersucht. Deshalb ist dieser Parameterbereich Gegenstand dieser Untersuchung. Die Konvektionsströmungen in einem differentiell geheizten, weiten sphärischen Spalt wurden in einem axialen Kraftfeld und mit Rotation kombiniert untersucht. Die Stabilitätskurve für ein Radienverhältnis $\eta=0.4$ und ein Silikonöl mit Prandtl-Zahl $Pr=39$ wurde bestimmt. Die stationären Geschwindigkeitsfelder wurden mit 2D-Particle-Image-Velocimetry (PIV) vermessen. Im rotierenden Fall wurde ein scannendes quasi-3D-PIV angewendet, um die dreidimensionale Struktur der entstehenden, sogenannten Polwirbel detailliert untersuchen zu können.

1 Einleitung

Die natürliche Konvektion ist eine auftriebsinduzierte Strömung. Die Auftriebskraft ist proportional zur lokalen Abweichung der Dichte, die auf lokale Temperaturunterschiede zurück geht.

Die Konvektionsströmung in sphärischen Spalten wird einerseits aus ingenieurwissenschaftlichem Interesse an Wärmetransportvorgängen und andererseits als Modell zur Erforschung geophysikalischer Strömungen genutzt. Dabei zeichnen sich die ingenieurwissenschaftlich interessanten Strömungen durch axiale Kraftfelder und kleine Taylor-Zahlen aus, d.h. der Einfluss der Zentrifugalkraft ist gegenüber der Gravitationskraft und der Coriolis-Kraft zu vernachlässigen. Die geophysikalisch relevanten Strömungen hingegen zeichnen sich durch den Grenzfall $a_{zf} \propto \Omega^2 r \gg g$ und Zentralkraftfelder aus. Unter Ausnutzung der strömungsmechanischen Ähnlichkeitsgesetze dient die Kugelspaltströmung als Modellexperiment für geophysikalische Fragestellungen wie die Herkunft des Erdmagnetfeldes. Obwohl viele Daten über das Magnetfeld der Erde bekannt sind, ist seine Entstehung bisher nur theoretisch erklärt. Als Ursprung für das Erdmagnetfeld werden die thermischen Strömungen aus flüssigem Metall im äußeren Erdkern angenommen [Tilgner, 2000]. Entsprechend der genannten Einsatzgebiete wurde die Konvektion in sphärischen Spalten sowohl experimentell als auch numerisch bisher für diese zwei Grenzfälle, $Ta=0$ und $Ta>10^8$, untersucht.

Die Konvektion im rotierenden sphärischen Spalt wird durch zwei strukturbildende Kräfte bestimmt: den thermischen Auftrieb im Gravitationsfeld und die Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte.

Der grundlegendste Fall der Konvektion, die von unten geheizte Flüssigkeitsschicht zwischen horizontalen Platten, wurde 1938 von Bénard experimentell untersucht (Abb. 1a). Bei kleinen Temperaturdifferenzen blieb das Fluid in Ruhe. Der parallele Druck- und Temperaturgradient halten sich die Waage. Ab einer kritischen Differenz jedoch stellt sich eine Strömung in Form von Rollen ein. Eine warme Fluidschicht unter einer kalten ist eine instabile Schichtung.

Da im differentiell geheizten, sphärischen Spalt Druck- und Temperaturgradient nicht parallel sind, setzt unter dem Einfluss der Erdgravitation bereits bei einer infinitesimal kleinen Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Außenkugel eine Konvektionsströmung ein (Abb. 1b).

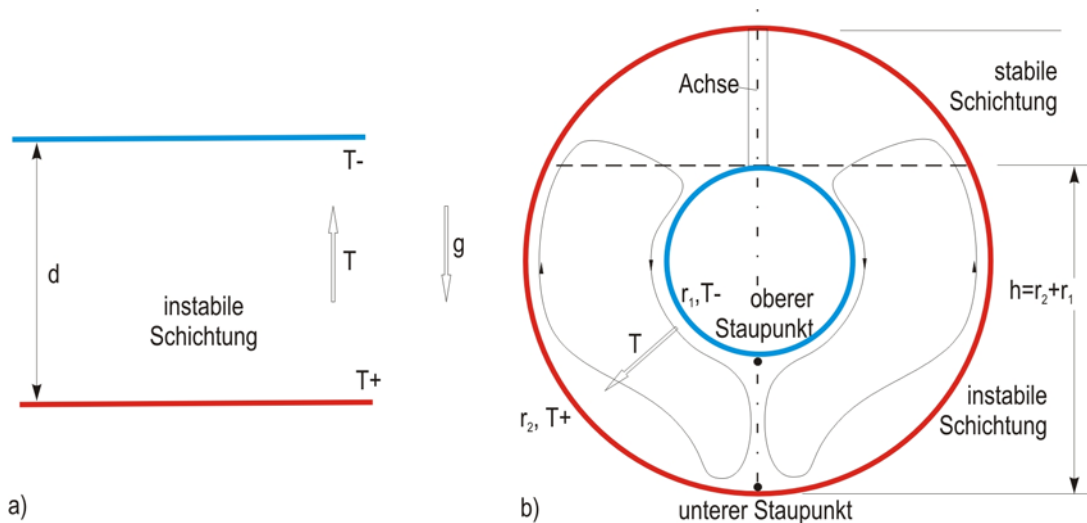


Abb. 1: a) Skizze zur Rayleigh-Bénard-Konvektion zwischen horizontalen Platten, b) Skizze zur Konvektion im differentiell geheizten, sphärischen Spalt mit oben liegender Achse.

Wird der sphärische Spalt rotiert, verändert sich das Druckfeld. Die Isobaren werden parabolisch. Ohne Temperaturdifferenz induziert die Festkörperrotation keine Strömung. Aber auf die Zirkulation der Primärströmung haben Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte einen Einfluss. Die zur Beschreibung des Systems herangezogenen dimensionslosen Kennzahlen sind die Rayleigh-Zahl $Ra = \gamma g \Delta T d^3 / \nu \kappa$, die Taylor-Zahl $Ta = 4 \Omega^2 d^4 / \nu^2$, die Prandtl-Zahl $Pr = \nu / \kappa$ und das Radienverhältnis $\eta = r_1 / r_2$, gebildet aus den Variablen kinematische Viskosität ν , Temperaturleitfähigkeit κ , thermischer Ausdehnungskoeffizient γ , Gravitation g , Spaltweite $d=r_2-r_1$, Winkelgeschwindigkeit $\Omega=2\pi f$ und Temperaturdifferenz ΔT .

Bei hinreichend großem thermischen Antrieb wird die Symmetrie der Primärströmung im nicht rotierenden Fall $Ta=0$ durch periodisch abtropfende Plumes gebrochen [Brucks, 2002],[Futterer, 2004]. Das Stabilitätsverhalten hängt von der Prandtl-Zahl ([Garg, 1991],[Futterer, 2004]) und dem Radienverhältnis ([Brucks, 2002],[Thamire, 1998],[Yin, 1973]) ab.

Auch der geophysikalisch interessante Bereich hoher Taylor-Zahlen $Ta > 10^8$ wurde detailliert untersucht. Bei hohen Taylor-Zahlen ist die Strömung durch die Kraftkomponente, die senkrecht zur Rotationsachse steht dominiert und es bilden sich sogenannte Kolumnarzellen ([Carrigan, 1983],[Cordero, 1993],[Sitte, 2004],[Brasch, 2002]).

Die erste, symmetriebrechende Instabilität durch Erhöhung der Rotationsrate ist bisher jedoch noch nicht untersucht. Dieser Bereich mittlerer Taylor-Zahlen, $Ta=0 \dots 10^5$, in dem sowohl Zentrifugal- als auch Coriolis-Kraftterme berücksichtigt werden müssen, ist daher Gegenstand dieser Untersuchung.

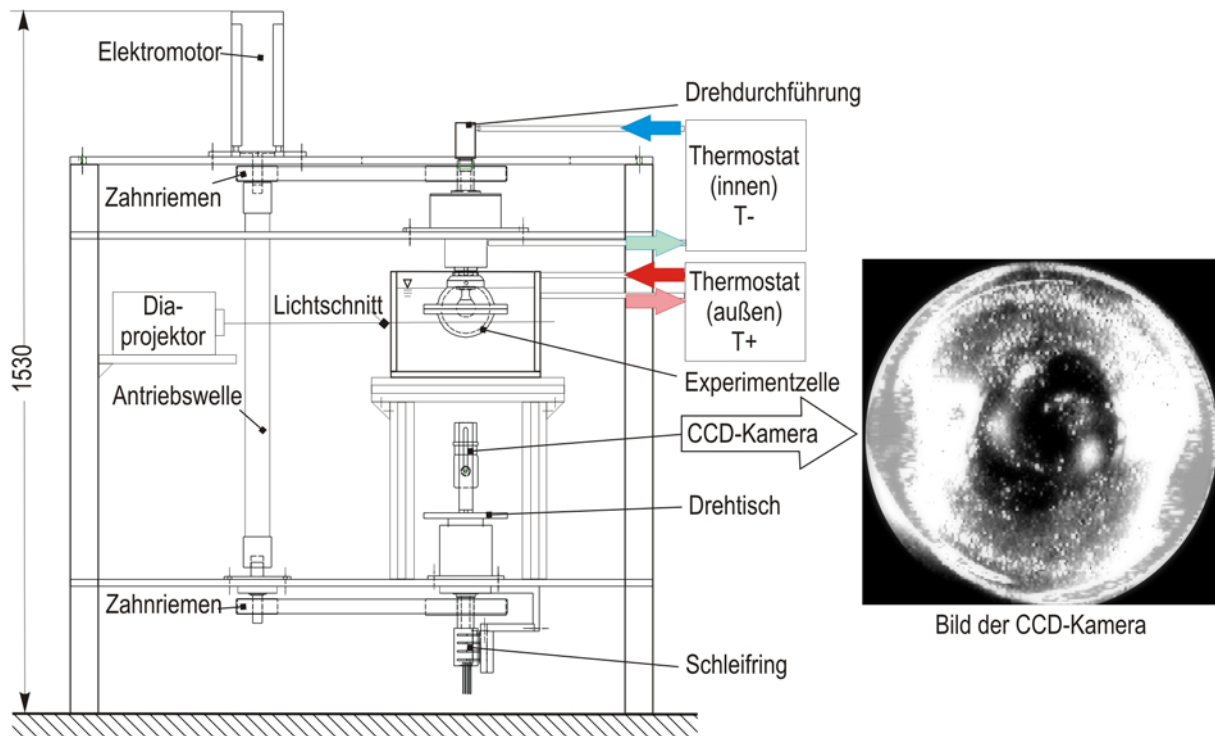


Abb. 2: Experimentaufbau und Lichtschnittaufnahmetechnik der mitrotierenden CCD-Kamera.

2 Experimentaufbau und Messtechnik

Der Experimentaufbau besteht aus der Kugelspaltzelle, dem Antriebsmodul, der Temperaturkontrolle für Innen- und Außenkugel und einer mitrotierenden CCD-Kamera (Abb. 2). Die konzentrische Kugelspaltzelle besteht aus einer transparenten Plexiglasaußenkugel ($r_2=35.00$ mm) und einer schwarzen Aluminiuminnenkugel ($r_1=14.00$ mm). Das Radienverhältnis beträgt $\eta=0.4$. Der Spalt ist mit einem Baysilone M3 Silikonöl gefüllt, das eine Viskosität von $\nu=3 \cdot 10^{-6}$ mm²/s bzw. eine Prandtl-Zahl von $Pr=39$ besitzt. Für die Visualisierung werden 0.01 Gew.-% Aluminiumfitter, mit einem Durchmesser von $\delta=50 \dots 100 \mu\text{m}$, und für das PIV-Signal 0.01 Gew.-% Polyamidkugeln Vestosint 1118, mit einem Durchmesser von $\delta=28 \mu\text{m}$, dem Silikonöl zugemischt.

Beide Kugelschalen sind fest mit einander verbunden und rotieren mit der gleichen Rotationsfrequenz f . Der Motor treibt synchron die Kugelspaltzelle und die mitrotierende CCD-Kamera über Zahnriemen an. Die mitrotierende Kamera erlaubt eine Beobachtung der Differenz- und Driftgeschwindigkeiten, da sie für den rotierenden Referenzrahmen ein stehendes Bild liefert. Desweiteren gestalten sich die Aufnahmen von der Belichtung günstiger, da die Wirbel von allen Seiten, rotierend beleuchtet werden. Die Genauigkeit der Drehzahl beträgt mindestens 0.1%. Die Rotationsfrequenz wurde von $f=0$ Hz bis 3 Hz variiert bei einer minimal möglichen Schrittweite von 0.01 Hz.

Die Temperaturkontrolle der Innenkugel erfolgt über einen Thermostaten und einen geschlossenen Öl-Kreislauf. Die Temperatur der Aussenkugel wird über einen Wassertank kontrolliert, der an einen weiteren Thermostaten angeschlossen ist. Die Thermostaten arbeiten mit einer Genauigkeit von 0.1 K. Durch die thermische Trägheit des Gesamtsystems und insbesondere durch den isolierenden Einfluss des für die Aussenkugel verwendeten Plexiglasses erreicht die Genauigkeit der Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Aussenkugel 0.5 K. Die Temperaturdifferenz über den Spalt wird zwischen $\Delta T=0.5$ K und 25 K variiert.

Der untersuchte Parameterbereich für das Fluid mit $Pr=39$ liegt im Bereich der Taylor-Zahlen $Ta=0\dots 1.6\cdot 10^6$ und der Rayleigh-Zahlen $Ra=0\dots 7\cdot 10^6$ mit einer Auflösung von $dTa=258$ und $dRa=191000$.

Als quantitatives Messverfahren wurde die optische und berührungslose Particle-Image-Velocimetry eingesetzt. Abb. 3 zeigt die Anordnung des verwendeten Systems der Fa. Dantec mit gepulsten Nd:YAG-Lasern, Strahlaufweitung und einer Kodak ES1.0 Kamera am Experiment. Die Strömung wurde im unteren Quadranten in Schnitten parallel zur Rotationsachse aufgenommen. Typische Zeitverzögerungen der zwei Frames liegen zwischen $t_{puls}=15ms$ und $65ms$. Die Messgenauigkeit wird durch die kleinste ausgegebene Geschwindigkeit festgelegt und beträgt $du=\pm 0.0073mm/s$ in allen Messungen. Durch die Brechungsindexanpassung, da Wasser bzw. Silikonöl an die gekrümmte Kugeloberfläche grenzen, wurde keine Längen- und Winkelverzerrung am Referenzgitter beobachtet. Verzerrungen liegen unterhalb der Pixelauflösung von $0.05mm$. Nach der Berechnung der Kreuzkorrelationen werden die Daten mit Größen- und Mittelungsfiltren bereinigt.

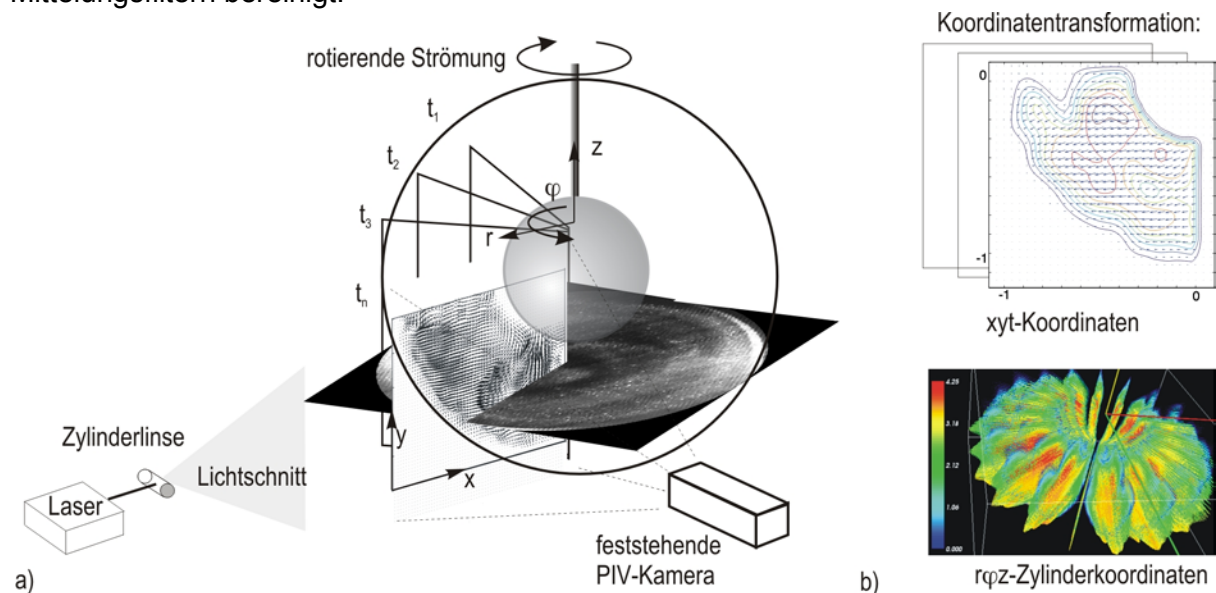


Abb. 3: a) Anordnung des PIV-Systems am Experiment, Erweiterung zur Quasi-3D-PIV, b) Nachbereitung der PIV-Ergebnisse: Koordinatentransformation in den 3D-Datenraum.

Um die dreidimensionalen Sekundärströmungen im rotierenden Fall detaillierter untersuchen zu können, wurde ein konventionelles 2D-PIV-System zu einem scannenden 3D-Verfahren weiter entwickelt.

Ziel ist es, eine räumliche Auflösung der Geschwindigkeitsfelder zu erreichen. Voraussetzung für die Anwendung dieses Quasi-3D-PIV-Verfahrens ist eine langsam rotierende Strömung bei feststehendem PIV-System. Die zu untersuchende Wirbelstruktur darf sich nur auf großen Zeitskalen $\tau_{Wirbel} \gg 1/f$ verändern. Das scannende Verfahren kann eingesetzt werden, wenn die azimuthalen Geschwindigkeiten durch die Rotation kleiner oder von der Größenordnung der radialen und meridionalen Geschwindigkeiten in den Wirbeln sind.

Während einer Umdrehung des Wirbels wird eine Sequenz von n aufeinander folgenden Einzel-Schnittaufnahmen aufgenommen (Abb. 3a). Die Zahl der Schnitte kann bei dem verwendeten System bis zu 25 gewählt werden, da sie durch die Speicherrate begrenzt wird. Die Auswertung erfolgt wie im vorherigen Abschnitt beschrieben.

Die Ergebnisse der Sequenz der n 2D-Einzelaufnahmen werden anschließend durch eine Koordinatentransformation von der zeitlichen Auflösung (x, y, t -Raum) in eine räumliche Auf-

lösung in Zylinderkoordinaten ($r\phi z$ -Raum) überführt. Die Schnitte sind gleichmäßig in ϕ -Richtung verteilt. Obwohl keine azimuthale Komponente gemessen werden kann, das Verfahren ist quasi-dreidimensional, lassen schon die Veränderung der radialen und meridionalen Geschwindigkeit die Gradienten in azimuthaler Richtung erkennen. Dies ist ein wichtiger Informationsgewinn durch die dreidimensionale Rekonstruktion.

Die Grenze der Anwendbarkeit dieses scannenden Verfahrens liegt auf der Hand. Sie ist durch die Rotationsfrequenz f des Experimentes beschränkt. Denn bei zu großer Umfangsgeschwindigkeit werden die Tracer aus der Lichtschnittebene quer herausgetragen, bevor sie ein zweites Mal beleuchtet und aufgenommen werden können. Der Korrelationsalgorithmus berechnet in dem Fall Artefakte, was zuerst in den am weitesten von der Rotationsachse entfernten Bereichen beobachtet werden kann, da die Umfangsgeschwindigkeit mit dem Abstand von der Achse zunimmt.

3 Ergebnisse

Abb. 4a zeigt das gemessene Geschwindigkeitsfeld der Primärströmung. In der 2D-PIV-Messung sind deutlich die Grenzschichten von den stagnierenden Bereichen im Zentrum der zirkulierenden Strömung zu unterscheiden. Die numerische Simulation (Abb. 4b) zeigt die direkte Kopplung zwischen Stromfunktion Ψ und Temperaturfeld T . Die Geschwindigkeits- und thermischen Grenzschichten stimmen überein. Diese Primärströmung ist bis $Ra=7.3 \cdot 10^6$ thermisch stabil.

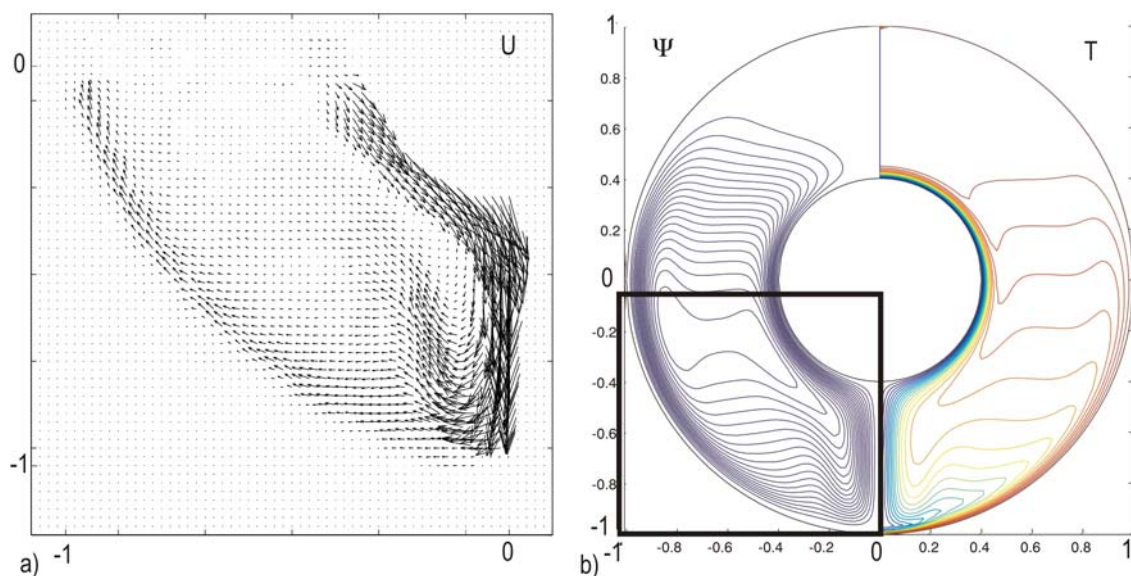


Abb. 4: Konvektive Primärströmung ($\eta=0.4$, $Pr=39$, $T_a=0$): a) gemessenes Geschwindigkeitsfeld (2D-PIV) $Ra=2.3 \cdot 10^6$, b) Stromfunktion und Temperaturfeld (numerische Simulation) $Ra=1 \cdot 10^6$.

3.1 Stabilitätsverhalten

Bei quasi-stationärer Erhöhung der Rotationsrate wird die Primärströmung bei einer kritischen Taylor-Zahl instabil und es entsteht ein Wirbel der Modenzahl $m=2$ im unteren Polbereich, der im horizontalen Schnitt eine charakteristische S-Form zeigt. Bei weiterer Erhöhung werden Modenzahlen $m=3$, 4 und größer gefunden. Die Wirbel sind bis $m=4$ formstabil mit einer retrograden Drift gegenüber der Festkörperrotation. Da bei höheren Taylor-Zahlen die Modenzahl und die Form der Wirbel zeitabhängig werden ([Sitte, 2004]), bezieht sich diese Arbeit nur auf Modenzahlen bis $m=4$. Das Stabilitätsverhalten der Polwirbel ist von der Änderungsrate der Kontrollparameter abhängig. Es konnte Hysterese an allen drei Übergängen

beobachtet werden, am deutlichsten aber für den Übergang zu $m=4$. Die Stabilitätskurven wurden bei konstant gehaltener Rayleigh-Zahl und quasi-stationärer Erhöhung der Taylor-Zahl aufgenommen. Die Einschwingzeit, die zwischen Taylor-Zahl-Änderungen abgewartet werden muss, kann über die Impulsdiffusionszeit $\tau = 2r^2 / \nu$ abgeschätzt werden. Sie beträgt $1 \dots 1.3 \cdot \tau = 1400 \dots 1800$ s. Für das Hochfahren bis zur Mode $m=4$ ergeben sich pro Messreihe Experimentzeiten von 6 bis 20h je nach Schrittweite dTa der Taylor-Zahl-Änderung.

Abb. 5 zeigt das gemessene Stabilitätsverhalten bis zur Modenzahl $m=4$. Die Stabilitätskurven für die drei Moden $m=2,3$ und 4 verlaufen unterschiedlich. Im unteren Rayleigh-Zahlen-Bereich unterhalb von $Ra < 8 \cdot 10^5$ ist die Stabilitätsgrenze stark von der Taylor-Zahl abhängig. Je kleiner der treibende Temperaturgradient ist, desto höher liegt die nötige kritische Taylor-Zahl $Ta_{c,m}$. Die untere Schranke der Rayleigh-Zahl, unterhalb derer keine Polwirbel mehr erzeugt werden konnten, liegt bei $Ra_{\min} = 4 \cdot 10^5$. Die Stabilitätsgrenze verläuft in diesem Bereich sehr steil und ist nur durch wenige Stützstellen bestimmt (gestrichelte Linie).

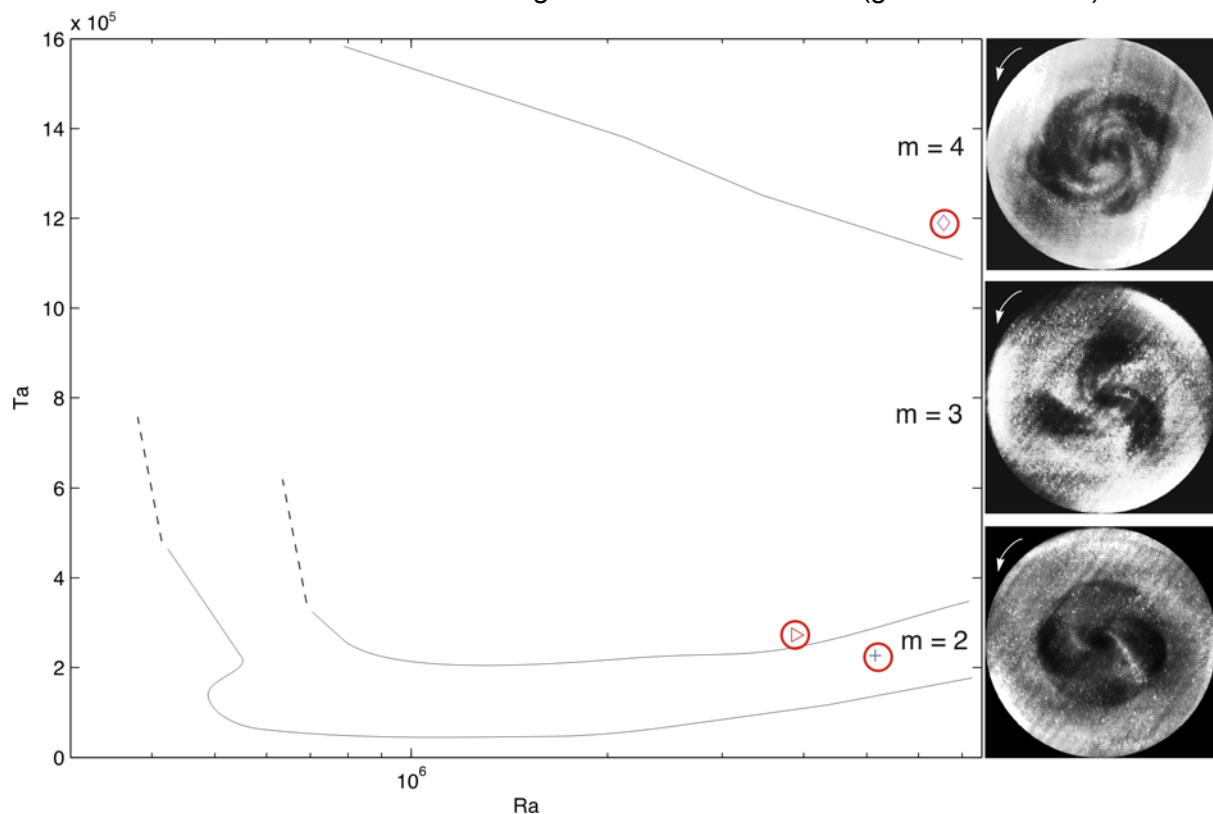


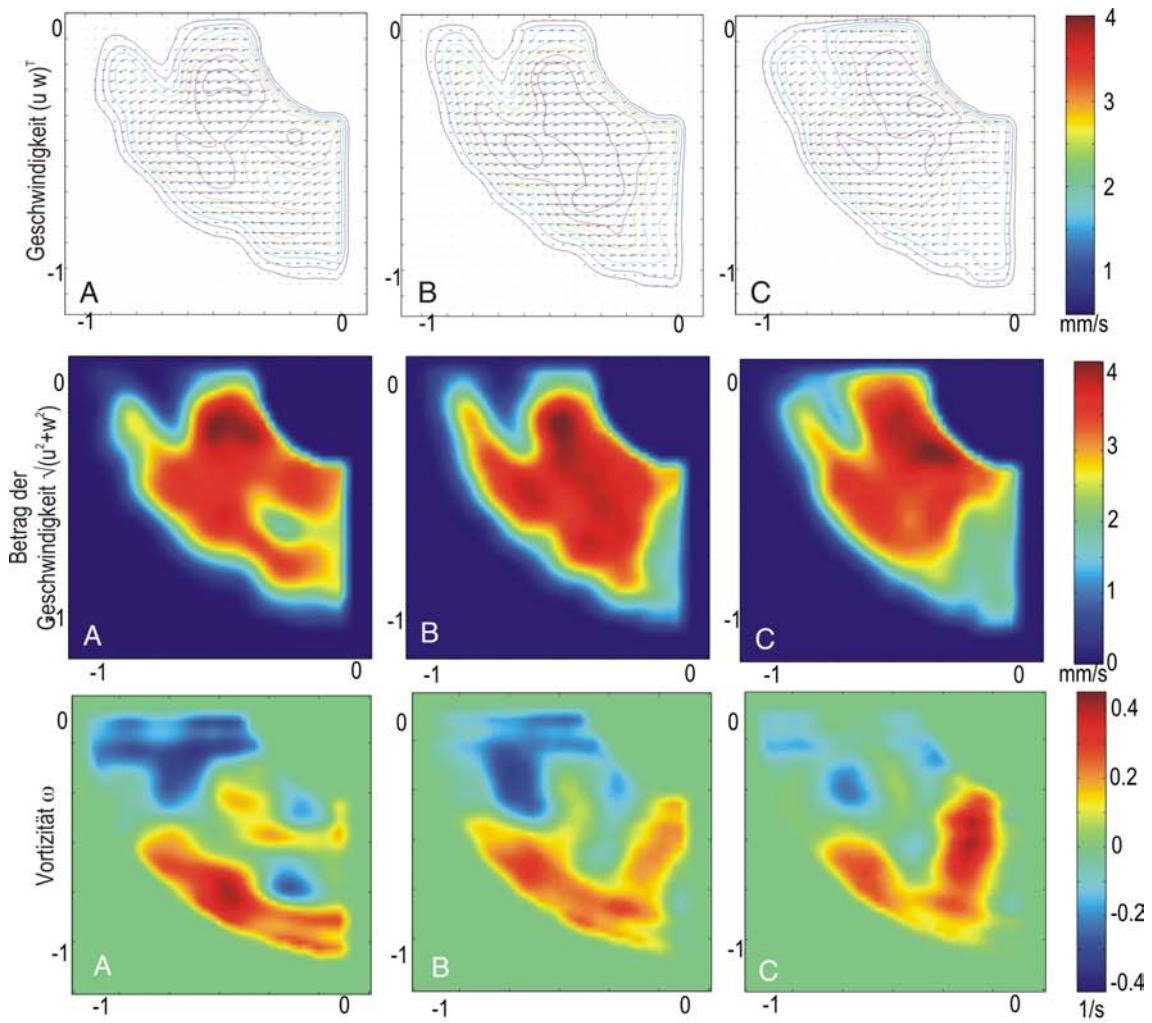
Abb. 5: Stabilitätsdiagramm $\eta=0.4$, $Pr=39$ mit Fotografien der Polwirbel $m=2,3$ und 4 .

3.2 Dreidimensionale Rekonstruktion der $m=2$ Polwirbel

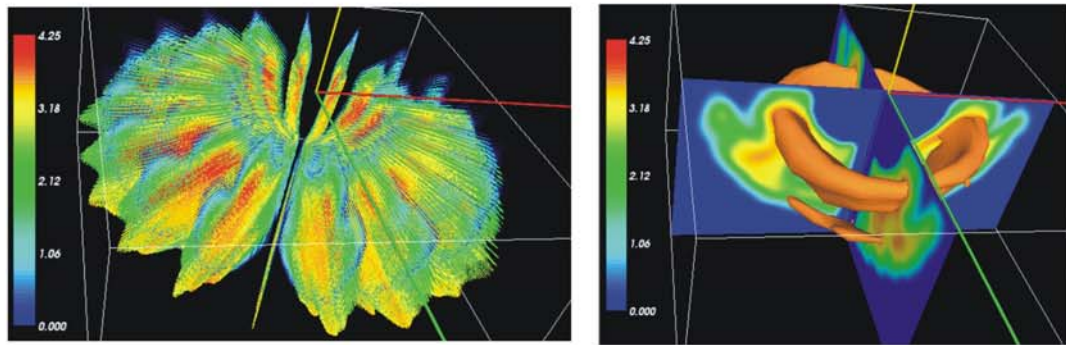
Die Ergebnisse der Quasi-3D-PIV-Messung für den im Abb. 5 mit einem Kreuz markierten Zustand der Mode $m=2$ werden im Folgenden diskutiert. Die Parameter des Zustands sind $Ra=2.3 \cdot 10^6$ und $Ta=3.9 \cdot 10^4$. In diesem Fall besteht die Rekonstruktion aus 19 Einzelaufnahmen, von denen drei charakteristische Schnitte A, B und C der gemessenen radialen und meridionalen Geschwindigkeitskomponenten u und w sowie die abgeleitete Vortizität ω durch einen Wirbelarm in Abb. 6a dargestellt sind.

Die Vektorbilder in der obersten Reihe der Abb. 6a zeigen, dass sich die Grenzschichten an Innen- und Außenkugel aufgelöst haben. Der Betrag der Geschwindigkeit ist in der 2. Reihe dargestellt und zeigt innerhalb des Wirbels die höchsten Geschwindigkeiten, die zu den Rändern hin abnehmen. Das Fluid strömt in den zwei Wirbelkernen nach unten, d. h. der

Wärmetransport geschieht an diesen zwei Stellen. Bei der Primärströmung gibt es nur einen Punkt des Wärmetransports.

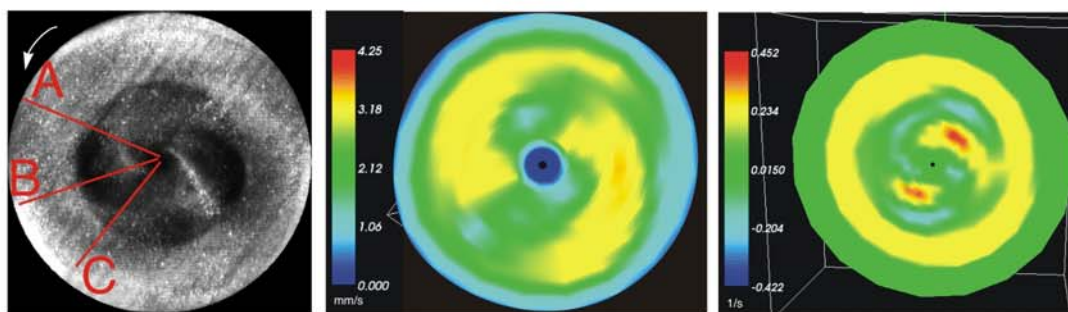


a) 3 charakteristische Schnitte aus den $n=19$ Schnitten der kompletten Serie von Einzelaufnahmen



b) 3D-Rekonstruktion des Geschwindigkeitsvektorfeldes

c) Schnitte und Isofläche in der 3D-Rekonstruktion



d) S-Struktur der $m=2$ Polwirbel im horizontalen Schnitt: Lichtschnittfoto, Geschwindigkeitsfeld, Vortizitätsfeld

Abb. 6: Rekonstruktion der $m=2$ Polwirbel. $Ra=2.3 \cdot 10^6$, $Ta=3.9 \cdot 10^4$, $\eta=0.4$, $Pr=39$.

Aus den Einzelschnitten wird das dreidimensionale Geschwindigkeitsfeld $(u \ w)^T$ rekonstruiert (Abb. 6b). Aus der Rekonstruktion lassen sich außer den bereits betrachteten achsenparallelen Schnitten vor allem nun auch Isoflächen (Abb. 6c) und die Gradienten in azimuthaler Richtung (Abb. 6d) bestimmen. Abb. 6d zeigt, dass die horizontalen Schnitte durch das gemessene Geschwindigkeitsfeld und das abgeleitete Vortizitätsfeld die charakteristische S-Struktur des $m=2$ Polwirbels wiedergeben. Die Begrenzung des Wirbels zeigt hohe Scherraten und geringe Vortizität, während der Wirbelkern die höchste Vortizität aufweist.

Ausblick

Abschließend sei auf offene Fragestellungen hingewiesen. Die Quasi-3D-PIV wurde bisher nur bei der Rekonstruktion des Geschwindigkeitsfeldes für ausgewählte Zustände der $m=2$ Mode für $Pr=39$ eingesetzt. Im nächsten Schritt sollte die Mode $m=3$ rekonstruiert werden. Um das Geschwindigkeitsfeld in der $r\phi$ -Ebene zu messen, muss das PIV-Messsystem von unten auf die Strömung ausgerichtet werden. Der Größenunterschied zwischen Rotationsgeschwindigkeit und lokaler Abweichung innerhalb der Wirbel stellt hier die besondere Herausforderung dar.

Das Frequenzverhalten der retrograden Drift der Polwirbel zeigt interessante Charakteristiken. Die Methode der Laser-Doppler-Anemometrie scheint geeignet, die Frequenzen der Dynamik der Wirbel mit entsprechender zeitlicher Auflösung zu untersuchen und detaillierte Untersuchungen des Hysterese-Verhaltens stehen noch aus.

Dankesworte

Die Autoren danken Herrn W. Brasch für die Programmierung der numerischen Simulation und das Zurverfügungstellen des Codes für weitere Berechnungen. Die Arbeit wurde durch BEOS, BMBF und DLR, FKZ 50WM9900, finanziert.

Literatur

- Brasch, W., Sitte, B., Egbers, C., 2002: Numerische Untersuchung der thermischen Konvektion in einer weiten Kugelschale, Proc. Appl. Math. Mech., Vol. 1, pp. 347-348
- Brucks, A., Sitte, B., Egbers, C., 2002: Onset of thermal convection and influence of rotation in wide spherical gap flow, Proc. Appl. Math. Mech., Vol. 1, pp. 286-287
- Busse, F. H., 1970: Thermal instabilities in rapidly rotating systems, J. Fluid Mech., Vol. 44, pp. 441-460.
- Carrigan, C. R., Busse, F. H., 1983: An experimental and theoretical investigation of the onset of convection in rotating spherical shells, J. Fluid Mech., Vol. 126, pp. 287-305
- Cordero, S., 1993: Experiments on convection in a rotating hemispherical shell: transition to chaos, Geo. Res. Lett., Vol. 20, pp. 2587-2590
- Futterer, B., Hollerbach, R., Egbers, C., 2004: Periodical convective flow in spherical shells, GAMM 2004, March 22 - 26, Dresden
- Garg, V. K., 1991: Natural convection between concentric spheres, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 35, pp. 1935-1945
- Sitte, B., 2004: Thermische Konvektion in Zentralkraftfeldern, VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 7, Nr. 460
- Thamire, C., Wright, N. T., 1998: Multiple and unsteady solutions for the buoyancy driven flows in spherical annuli, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 41, pp. 4121-4138
- Tilgner A., 2000: Towards experimental dynamos, Phys. o. t. Earth a. Planetary Interiors, Vol. 117, pp. 171-177
- Yin, S. H., Powe, R. E., Scanlan, J. A., Bishop, E. H., 1973: Natural convection flow patterns in spherical annuli, Int. J. Heat Mass Trans., Vol. 16, pp. 1785-1795