

# Realisierung einer multidimensionalen Korrelationsanalyse für die Particle Image Velocimetry

A. Raufeisen, H. Nobach

FG Strömungslehre und Aerodynamik  
TU Darmstadt, Petersenstraße 30, 64287 Darmstadt

*In dieser Arbeit wird ein Verfahren der Particle Image Velocimetry (PIV) implementiert, das es ermöglicht, Gradienten einer Strömung direkt zu bestimmen. Das Grundprinzip nach Hart 2002, die Gradienten in die Korrelationsanalyse mit einzubeziehen anstatt sie nachträglich durch numerische Differentiation aus dem Geschwindigkeitsfeld zu berechnen, wird modifiziert und durch Subpixel-Interpolation und iterative Optimierungsverfahren erweitert. Neben einer direkten Korrelation wird auch ein FFT-basierter Algorithmus realisiert. Die Validierung erfolgt durch Berechnung von Testfällen, die aus synthetisch generierten Bildern bestehen. Anhand der Ergebnisse lässt sich feststellen, dass die multidimensionale Korrelationsanalyse in Verbindung mit direkter Korrelation Vorteile bei der Berechnung der Strömungsgradienten im Vergleich zur numerischen Differentiation bietet.*

## 1 Einführung

Die Particle Image Velocimetry (PIV) findet als bildgebendes Verfahren in der Strömungsmesstechnik weite Verbreitung, da sich in vielen Anwendungen bei der Bestimmung von Geschwindigkeitsfeldern und abgeleiteten Größen hohe Genauigkeiten erzielen lassen. Jedoch kommt es beim Einsatz klassischer Analysemethoden in Strömungen mit hohen Gradienten zu deutlichen systematischen Abweichungen.

Um die Qualität der Ergebnisse zu verbessern, wurden bereits Methoden entwickelt, die Gradienten in die Berechnung einbeziehen, indem die Partikelbilder bzw. Bildausschnitte (interrogation windows) entsprechend der Verzerrung durch die Gradienten deformiert und danach korreliert werden. Dieser Ansatz findet sich erstmals bei Huang et al. 1993, dort bezeichnet als Particle Image Distortion (PID), und wurde in vielen nachfolgenden Arbeiten aufgegriffen. Dabei wird allerdings die Gradienteninformation, die sich aus der Verformung ergibt, nicht weiter als Ergebnis verwendet, sondern die Gradienten werden durch numerische Differentiation aus den berechneten Geschwindigkeitsdaten erzeugt. Daraus folgen zwei Fehlerquellen: Zum einen der systematische Fehler der Differentiation (je nach Ordnung des Verfahrens), zum anderen der Fehler der vorangegangenen Berechnung der Geschwindigkeit, also die Unsicherheit des verwendeten PIV-Algorithmus. Eine direkte Bestimmung der Gradienten kann die Ungenauigkeiten der numerischen Differentiation eliminieren, da kein nachträgliches Differenzieren erforderlich ist und somit auch keine Folgefehler auftreten. Bei Ruan et al. 2001 wird ein solches Verfahren

verwendet, genannt „direct measurement of vorticity“ (DMV). Dort erfolgt die Berechnung der Wirbelstärke über die Winkelgeschwindigkeit, die man erhält, indem die Partikelbilder vor der Korrelation von kartesischen in Polarkoordinaten transformiert werden. Dies führt jedoch zu teilweise großen Verzerrungen der Bilder, die eine bereichsweise relativ hohe Unsicherheit zur Folge haben. Die gesamte Performance des Algorithmus ist vergleichbar mit Standardmethoden, allerdings wird nur die Wirbelstärke berechnet, einzelne Gradienten lassen sich nicht aus den Ergebnissen extrahieren.

In dieser Arbeit wird ein Verfahren vorgestellt, das zusätzlich zu den Geschwindigkeitsdaten die Gradienten einer Strömung direkt bestimmen kann. Nach der Beschreibung des grundlegenden Prinzips erfolgt eine Erläuterung der Implementierung des Algorithmus mit den angebrachten Erweiterungen. Anschließend wird die Leistungsfähigkeit analysiert; dazu werden die betrachteten Fehlergrößen dargestellt, die berechneten Testfälle aufgelistet und schließlich die Ergebnisse präsentiert.

## 2 Prinzip

Die grundlegende Idee der multidimensionalen Korrelation nach Hart 2002 besteht in einem pixelweisen Aufbau einer erweiterten Korrelationstabelle.

In den Standardalgorithmen der digitalen PIV wird eine Verschiebung  $(u, v)$  zwischen zwei Partikelbildern mit Hilfe der Kreuzkorrelation ermittelt, d.h. die Bilder bzw. Bildbereiche werden übereinandergelegt, korrespondierende Pixel miteinander multipliziert und die Summe der Produkte an entsprechender Stelle in der Korrelationstabelle addiert.

Um zusätzlich zu der Translation auch die Rotation bzw. die Gradienten der Translation zwischen zwei Partikelbildern zu bestimmen, erweitert man die Tabelle um die entsprechende Anzahl Dimensionen. Um die Gradienten erfassen zu können, führt man die Korrelation pixelweise durch, d.h. einzelne Pixelwerte werden paarweise verglichen und das Produkt an verschiedenen Positionen in der Korrelationstabelle, die sowohl mit der Verschiebung als auch mit möglichen Gradienten korrespondieren, eingetragen.

In Abbildung 1 ist das Verfahren schematisch dargestellt. Der Einfachheit halber wird außer der Verschiebung  $(u, v)$  nur der Gradient  $\frac{\partial u}{\partial y}$  betrachtet, die Korrelationstabelle ist also dreidimensional. Bei einem Vergleich der Pixel  $P_1$  und  $Q_1$  wird das Produkt in der Korrelationstabelle an der Position  $(u, v, \frac{\partial u}{\partial y})$  mit  $u = x_{Q_1} - x_{P_1}$ ,  $v = y_{Q_1} - y_{P_1}$  und  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  eingetragen. Außerdem wird der Wert dort addiert, wo durch eine Verzerrung durch einen Gradienten  $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$  eine höhere bzw. niedrigere Verschiebung in Bezug auf den Bildmittelpunkt stattfindet, z.B. bei  $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$  an der Position  $(u - 1, v, \frac{\partial u}{\partial y})$ . So wird für alle möglichen Kombinationen von Verschiebung und Gradienten verfahren. Es ergibt sich eine Reihe von Einträgen in der Korrelationstabelle, die sich gedanklich mit einer Gerade verbinden lassen. Analog wird dies für alle anderen Punkte der Partikelbilder durchgeführt.

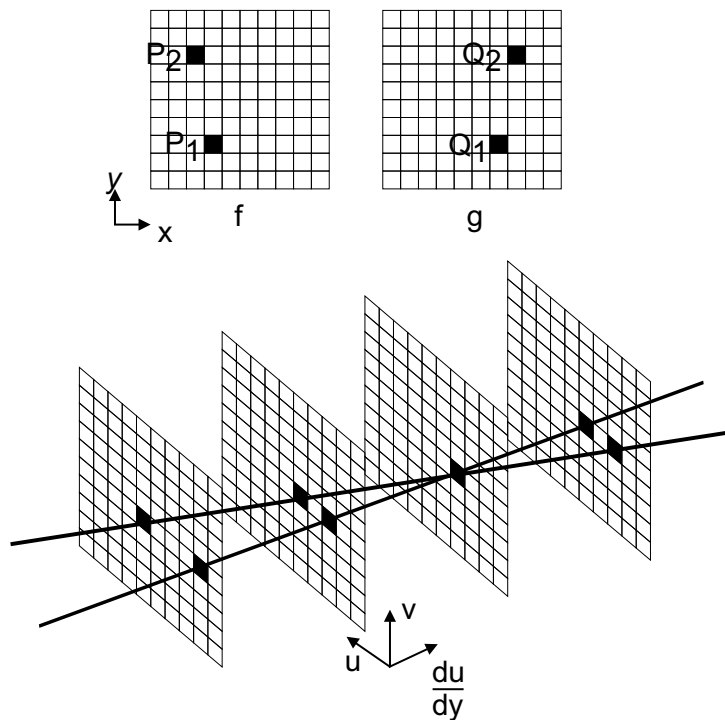


Abbildung 1: Vereinfachte schematische Darstellung der Aufstellung der multidimensionalen Korrelationsfunktion nach Hart 2002.

### 3 Implementierung

Der oben beschriebene pixelweise Aufbau der Korrelationstabelle ist sehr zeitaufwändig und programmtechnisch ineffizient. Es lässt sich aber zeigen, dass diese Methode auf Matrix-Operationen zurückzuführen ist (Raufeisen 2003), d.h. die Korrelationstabelle wird jeweils für einen ganzen Bildausschnitt erstellt. Bei Anwendung der direkten Korrelation bedeutet dies, dass zu einem Bereich des einen Partikelbildes der Bereich des anderen Bildes mit einer bestimmten Verschiebung und durch einen potenziellen Gradienten erzeugten Verzerrung gewählt und beide anschließend in einem Schritt korreliert werden. Dieses Verfahren impliziert ein so genanntes „window-shifting“, wie es von Westerweel et al. 1997 entwickelt wurde. Die Verzerrung durch Gradienten ist mit dem als „window-deformation“ bezeichneten Verfahren (Scarano 2002) vergleichbar. Um eine Rasterung durch die Deformation der Fenster zu vermeiden und eine Auflösung im Subpixel-Bereich zu ermöglichen, wird eine bikubische Bildinterpolation durchgeführt. Da die multidimensionale Korrelation sehr rechenintensiv ist, wird ein iteratives Optimierungsverfahren der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP) eingesetzt, um das Maximum der Korrelationsfunktion in effizienter Weise zu finden.

Zur weiteren Verringerung des Rechenaufwandes wird die Kreuzkorrelation mit einer Fast Fourier Transformation (FFT) verbunden. Die speziellen Eigenschaften der FFT im Zusammenhang mit der Kreuzkorrelation, wie sie in Raffel et al. 1998 ausführlich analysiert werden, werden dabei berücksichtigt, so dass keine systematischen Fehler auftreten. Bei Anwendung der FFT wird im Gegensatz zur direkten Korrelation immer das gesamte Spektrum der möglichen Verschiebungen berechnet; daraus ergeben sich Unterschiede in der Implementierung der multidimensionalen Korrelation. Um auch hier den Vorteil des „window-shifting“ bei Verwendung der

FFT nutzen zu können, werden zwei unterschiedlich große Bereiche korreliert (2). Außerdem wird das Optimierungsverfahren nur zur Bestimmung der Gradienten verwendet, die Korrelationsfunktion der Translation wird mit Hilfe eines 3-Punkt-Gauß-Verfahrens interpoliert.

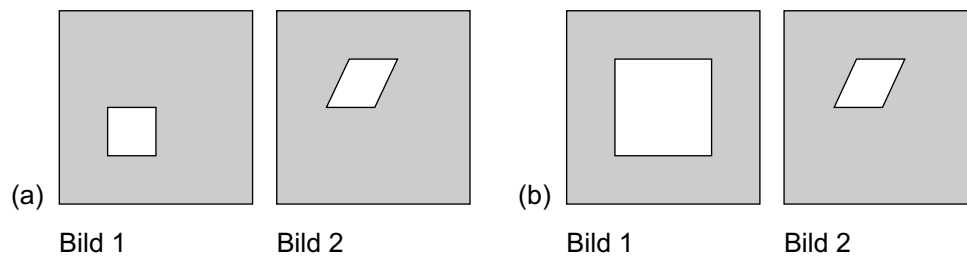


Abbildung 2: Schema der dynamischen Auswahl der Korrelationsfenster für (a) direkte und (b) FFT-basierte Korrelation

#### 4 Fehlergrößen

Als Ergebnis der Berechnungen werden ein Geschwindigkeitsfeld mit den zwei Komponenten  $u$  und  $v$  und die entsprechenden orthogonalen Gradienten  $\frac{\partial u}{\partial y}$  und  $\frac{\partial v}{\partial x}$  ausgegeben. Aus den beiden Vektoren  $u$  und  $v$ , hier als  $v_x$  und  $v_y$  bezeichnet, wird zum besseren Vergleich eine einheitliche Größe  $v$ , der Betrag der Geschwindigkeit, berechnet:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (1)$$

Mit den Gradienten lässt sich als strömungstechnische Größe die Wirbelstärke  $\omega$  darstellen, die mathematisch die Rotation des Geschwindigkeitsvektors ist. Da es sich hier um eine zweidimensionale Betrachtung handelt, treten nur die beiden genannten Gradienten auf, da die dritte Geschwindigkeitskomponente gleich Null ist:

$$\omega = \nabla \times \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

Diese beiden Größen  $v$  und  $\omega$  werden statistisch analysiert. Es wird über eine Stichprobe von 100 Berechnungen pro Algorithmus gemittelt.

Der Fehler einer Berechnung setzt sich üblicherweise aus zwei Komponenten zusammen: aus dem systematischen Fehler, der in der Natur des Algorithmus liegt, und dem zufälligen Fehler, der durch statistische Schwankungen des Bildinhalts hervorgerufen wird. Der systematische Fehler lässt sich einfach aus der Differenz des Durchschnitts der berechneten Werte zum exakten Wert ermitteln, also hier

$$\bar{\varepsilon}_v = \bar{v} - v_{\text{exakt}} \quad \text{mit} \quad \bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i \quad (3)$$

Den zufälligen Fehler kann man durch die Berechnung der Standardabweichung quantifizieren, deren Formulierung wie folgt lautet:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2} \quad (4)$$

Gleichungen 3 bis 4 gelten analog für  $\omega$ .

Bei der Anwendung der Algorithmen kann es zur Ausgabe von offensichtlich fehlerhaften Vektoren (Ausreißern) kommen. Sie entstehen durch starkes Rauschen in der Korrelationsfunktion, welches das wahre Maximum überdeckt und dessen Auffinden unmöglich macht. Diese großen Abweichungen verfälschen das statistische Ergebnis und behindern damit die Auswertung. Aus diesem Grund werden solche Ausreißer aus dem resultierenden Vektorfeld entfernt und einer gesonderten Betrachtung unterzogen.

## 5 Testfälle

Um die entwickelten Algorithmen zu validieren, werden verschiedene Testfälle berechnet. Dazu werden aus Strömungen mit bekanntem Geschwindigkeitsfeld synthetische Partikelbilder erzeugt. Die Erstellung der Bilder erfolgt mit typischen Parametervorgaben, was z.B. die Partikelgröße und -verteilung betrifft (siehe Tabelle 1).

Bildgröße	[Pixel <sup>2</sup> ]	256 × 256
Partikeldurchmesser	[Pixel]	2 . . 4
Partikelanzahl	[–]	4000

Tabelle 1: Parameter der synthetischen Partikelbilder

Die verschiedenen Testfälle umfassen Strömungen mit konstanter Geschwindigkeit, mit konstantem Gradienten und einen Lamb-Oseen-Wirbel. Dieser verfügt über eine ungleichmäßige Verteilung von Geschwindigkeit und Gradienten, die sich analytisch berechnen lässt:

$$v_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right); \quad v_r = 0 \quad (5)$$

Dabei bezeichnet  $r$  den Radius, also den Abstand vom Zentrum des Wirbels, die Größen  $\Gamma$  und  $\nu$  sind Parameter, die die Form des Geschwindigkeitsfeldes bestimmen (siehe Tabelle 2). Die Wirbelstärke ergibt sich einfach aus der Rotation der Geschwindigkeit zu

$$\omega_z = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \quad (6)$$

Durch eine geschickte Wahl der Parameter kann man ein Geschwindigkeitsfeld erhalten, das das 1/4-Kriterium für die Verschiebung nicht verletzt, andererseits eine möglichst große Bandbreite, auch an Wirbelstärke, aufweist.

Für einen relativen Vergleich der Ergebnisse werden Algorithmen herangezogen, die ohne eine multidimensionale Korrelation arbeiten, ansonsten aber mit den hier entwickelten identisch sind. Die Testfälle werden von jedem Algorithmus sowohl mit einer Fenstergröße von 16 × 16 als auch 32 × 32 Pixeln berechnet, jeweils mit einer Überlappung von 50%.

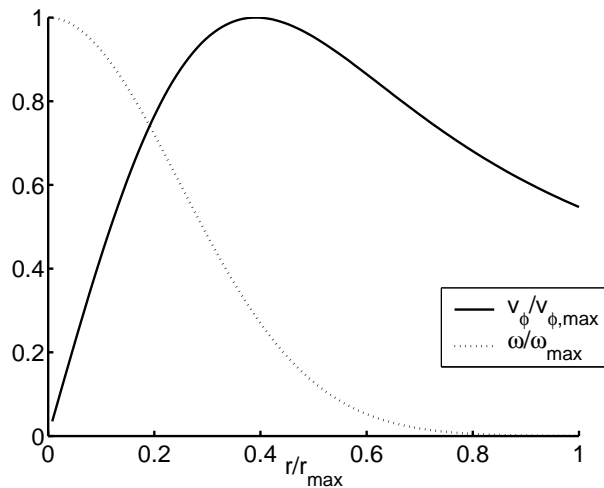


Abbildung 3: Verteilung des Geschwindigkeitsbetrags  $v$  und der Wirbelstärke  $\omega$  über den Radius des Lamb-Oseen-Wirbels

$\Gamma$	[Pixel <sup>2</sup> ]	2000
$\nu t$	[Pixel <sup>2</sup> ]	500
$\omega_{z,max}$	[Pixel/(\Delta t) <sup>2</sup> ]	0,32
$v_{phi,max}$	[Pixel/\Delta t]	4,5

Tabelle 2: Parameter der generierten Lamb-Oseen-Wirbel

## 6 Ergebnisse

Die Algorithmen werden zunächst auf Strömungen mit konstantem Geschwindigkeitsfeld mit Geschwindigkeiten von 0,1 bis 1 Pixel Verschiebung pro Bildintervall ( $Pixel/\Delta t$ ) angewendet. In Abbildung 4 ist der absolute Fehler und die Standardabweichung über die tatsächliche Geschwindigkeit für den Algorithmus mit direkter Korrelation aufgetragen. Es ist zu beobachten, dass die Standardalgorithmen eine höhere Genauigkeit im Subpixel-Bereich aufweisen. Dies ist Folge des bei der multidimensionalen Korrelation verwendeten Interpolationsverfahrens. Der Algorithmus mit FFT-basierter Korrelation weist ein ähnliches Verhalten auf.

Die Ergebnisse der Berechnung einer Strömung mit gleichförmiger Beschleunigung zeigen hingegen recht deutlich die Vorteile der Verfahren mit multidimensionaler Korrelation. In Abbildung 5) sind für das direkte Verfahren der absolute Fehler und die Standardabweichung der Wirbelstärke logarithmisch über der tatsächlichen Wirbelstärke im Bereich von 0,01 bis 0,1  $Pixel/(\Delta t)^2$  aufgetragen. Der Fehler steigt zwar ebenso wie bei den herkömmlichen Verfahren mit größer werdender Wirbelstärke an, jedoch auf einem wesentlich niedrigeren Niveau. Die Standardabweichung bleibt bei beiden nahezu konstant, es zeigt sich aber ebenso die Niveaudifferenz. Die Berechnung mit FFT-basierter Korrelation weist jedoch schlechtere Ergebnisse auf: Es ist kaum eine Unterscheidung der Verfahren mit und ohne Berücksichtigung der Gradienteninformation möglich. Eine Betrachtung der Anzahl der Ausreißer zeigt den negativen Einfluss des Optimierungsverfahrens: Bei direkter Korrelation liegt der Anteil der offensichtlich fehlerhaft berechneten Vektoren bei über 60% bzw. über 90% (Standardalgorithmus); bei Anwendung der FFT jedoch nur bei unter 10%.

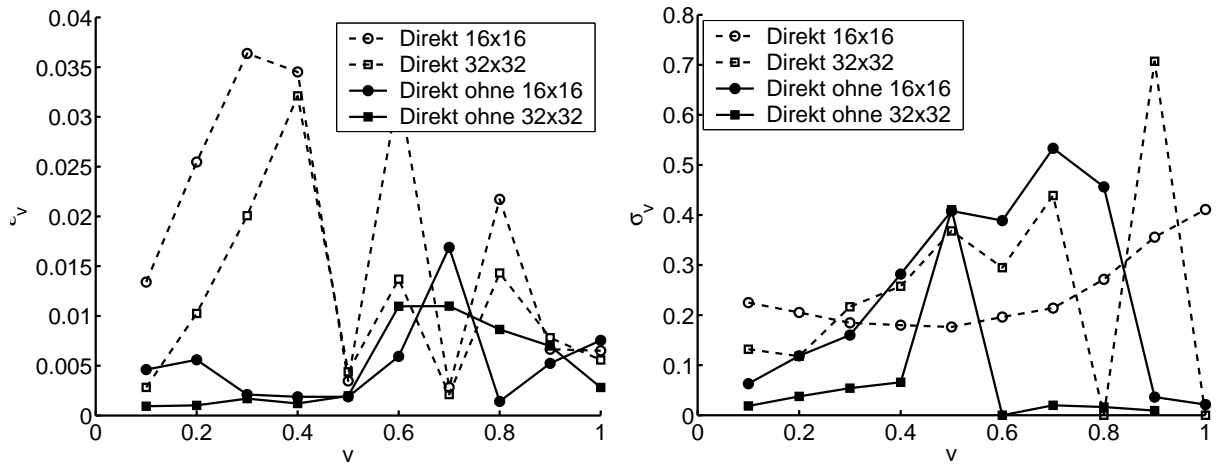


Abbildung 4: Absoluter Fehler  $\varepsilon_v$  und Standardabweichung  $\sigma_v$  der Geschwindigkeit über der wahren Geschwindigkeit bei Anwendung der direkten Korrelation auf ein konstantes Geschwindigkeitsfeld.

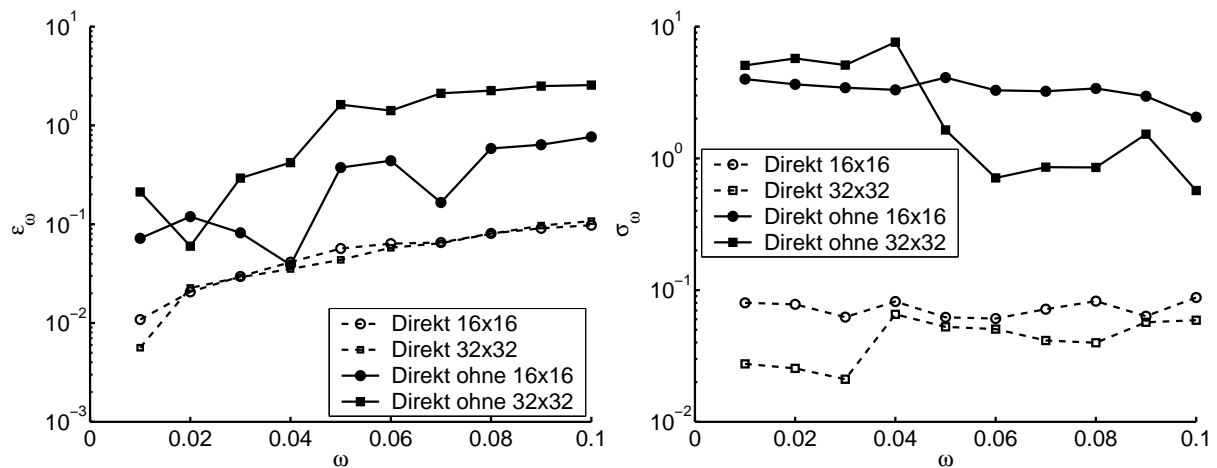


Abbildung 5: Absoluter Fehler  $\varepsilon_\omega$  und Standardabweichung  $\sigma_\omega$  der Wirbelstärke über der Wirbelstärke bei Anwendung der direkten Korrelation auf ein konstantes Gradientenfeld.

Bei der Berechnung der simulierten Lamb-Oseen-Wirbel ist trotz der Schwankungen zu erkennen, dass sich die Abweichung mit steigender Wirbelstärke nur leicht vergrößert. Abbildung 6 zeigt wie die vorhergehende einen Vergleich der berechneten und tatsächlichen Wirbelstärke, diesmal im extremen Bereich von 0 bis  $0,32 \text{ Pixel}/(\Delta t)^2$ . Dabei versagen die Standardalgorithmen: Die Zahl der Ausreißer beträgt nahezu 100%, so dass eine Darstellung nicht möglich ist. Der FFT-Algorithmus zeigt wiederum keine Verbesserung durch die Einbeziehung der Gradienten.

## 7 Zusammenfassung

Die Anwendung einer multidimensionalen Korrelation in der PIV wurde vorgestellt. Es konnte gezeigt werden, dass dieses Verfahren bei der Analyse von Strömungen mit hohen Gradienten robuster und genauer arbeitet als Standardalgorithmen, da die Gradienten direkt ausgegeben und nicht nachträglich aus den Geschwindigkeitsdaten berechnet werden. Es haben sich

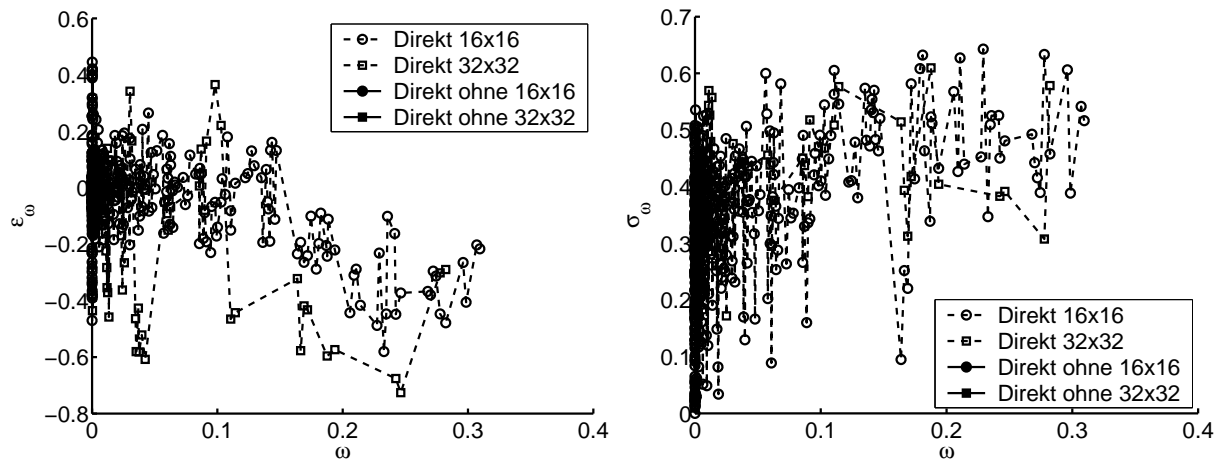


Abbildung 6: Absoluter Fehler  $\varepsilon_\omega$  und Standardabweichung  $\sigma_\omega$  der Wirbelstärke über der Wirbelstärke bei Anwendung der direkten Korrelation auf die Lamb-Oseen-Wirbel.

jedoch Einschränkungen in der erzielbaren Genauigkeit durch die verwendeten Interpolationsverfahren ergeben. Dies lässt sich durch die Implementierung optimierter Algorithmen beheben (Nobach et al. 2004). Ferner lässt sich das Verfahren, mit dem hier nur beispielhaft aus 2 Gradienten die Wirbelstärke berechnet wird, auf die Gradienten in Strömungsrichtung erweitern, wodurch sich noch mehr Möglichkeiten bieten, etwa die Ausgabe von Divergenz oder Invarianten des Spannungs- oder Dehnungstensors. Darüber hinaus ist die Einbeziehung einer dritten räumlichen Dimension zur Anwendung in der Stereo-PIV denkbar.

## Literatur

HART, Douglas P.: PIV Processing Using Multidimensional Correlation. In: *The 10th International Symposium on Flow Visualization*. Kyoto, Japan, August 2002

HUANG, H. T. ; FIEDLER, H. E. ; WANG, J. J.: Limitation and improvement of PIV, Part II: Particle image distortion, a novel technique. In: *Experiments in Fluids* 15 (1993), S. 263–273

NOBACH, Holger ; DAMASCHKE, Nils ; TROPEA, Cam: High-precision sub-pixel interpolation in PIV/PTV image processing. In: *The 12th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*. Lisbon, Portugal, 2004

RAFFEL, M. ; WILLERT, C. ; KOMPENHANS, J.: *Particle image velocimetry: a practical guide*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1998

RAUFEISEN, Alexander: *Realisierung einer multidimensionalen Korrelationsanalyse für die Particle Image Velocimetry*, TU Darmstadt, Diplomarbeit, November 2003

RUAN, X. ; SONG, X. ; YAMAMOTO, F.: Direct measurement of the vorticity field in digital particle images. In: *Experiments in Fluids* 30 (2001), S. 696–704

SCARANO, F.: Iterative image deformation methods in PIV. In: *Measurement Science and Technology* 13 (2002), S. R1–R19

WESTERWEEL, J. ; DABIRI, D. ; GHARIB, M.: The effect of a discrete window offset on the accuracy of cross-correlation analysis of digital PIV recordings. In: *Experiments in Fluids* 23 (1997), S. 20–28