

STRAHLENOPTISCHE MODELLE DER PHASEN-DOPPLER-ANEMOMETRIE FÜR KUGEL- UND ELLIPSOIDFÖRMIGE PARTIKEL

Heinrich Krambeer

Universität Rostock, Institut für Allgemeine Elektrotechnik, Albert-Einstein-Straße 2, 18051 Rostock

Kurzfassung

Ein bewährtes laseroptisches Meßsystem für Partikelgrößen in Sprühprozessen ist das Phasen-Doppler-Anemometer (PDA). Seine Anwendung setzt eine sphärische Form der Partikel (Tropfen) voraus. Doch treten im praktischen Einsatz auch Abweichungen von der Kugelform und damit Fehler bei der PDA-Messung auf. Ein Modell für verformte Tropfen ist das Rotationsellipsoid (Sphäroid). Es wird mit diesem Beitrag eine entsprechende Erweiterung der theoretischen Grundlagen des Standard-PDA vorgenommen. Dies führt für die Anwendung auf sphäroide Partikel im Reflexionsmodus auf analytische Lösungen für die Halbachsen-Phasen-Beziehungen. In diesem Rahmen sind dann sphärische Partikel ein Sonderfall. Für den Brechungsmodus verbleibt ein nichtlineares Gleichungssystem. Bei wenig verformten Partikeln ist die numerische Lösung unproblematisch, da ein Startwert unter der Annahme der Kugelform analytisch berechnet werden kann. Im Vergleich zum Standard-PDA sind weitere Empfängerpaare mit abgestuft ausgewählten Elevationswinkeln erforderlich. Justageproblemen kann durch den Einsatz von Detektorarrays begegnet werden.

Einleitung

Die Messung von Tropfen- und Partikelgrößen ist von Bedeutung für die Optimierung von Spritz- und Zerstäubungsprozessen. Anwendungsgebiete sind z. B. die Spritzlackierung, pharmazeutische Sprays, Spritzen landwirtschaftlicher Kulturen, die Sprühtrocknung in der Verfahrenstechnik und die Kraftstoffeinspritzung in Motoren. Ein verbreitet eingesetztes laseroptisches Partikelgrößen-Meßsystem, das Phasen-Doppler-Anemometer (PDA), setzt in seiner bisherigen Form eine sphärische Oberfläche der Partikel voraus, was für kleine Tropfen wegen der dann vorhandenen Dominanz der Oberflächenspannung auch erfüllt ist. Doch treten besonders bei größeren Tropfen durch äußere Kräfte und Tropfendynamik Abweichungen von der Kugelform und damit Meßfehler auf. Ein einfaches Modell für verformte Tropfen ist das Rotationsellipsoid (Sphäroid). Als Voraussetzung für die Anwendung des PDA auf sphäroide Partikel wurde bisher deren Lichtstreuung analysiert, siehe Lock 1996, Schelinsky 2002. Als mögliche Meßanordnung für verformte Partikel wurde das Dual-Mode-Phasen-Doppler-System vorgeschlagen, siehe Damaschke et al 1998, welches aus der Kombination eines Standard- mit einem Planar-PDA besteht und im Prinzip orthogonale Krümmungsradien messen kann. Jedoch werden dafür zwei Sendestrahlpaare erforderlich und die Empfindlichkeit der planaren Komponente ist verringert. Nachfolgend werden die theoretischen Grundlagen des Phasen-Doppler-Anemometers in einer solchen Form entwickelt, daß Freiheitsgrade in Bezug auf die Wahl der Empfängerpositionen erhalten bleiben und sphäroide Partikelformen (und im Prinzip auch andere) in die Analyse einbezogen werden können. Dabei werden wie allgemein üblich je nach ausgenutzter Streulichtordnung Re-

flexions- und Brechungsmodus unterschieden. Bezüglich der Konfiguration und Funktion des PDA-Meßaufbaus sei auf Albrecht et al 2003 verwiesen.

1. Reflexionsmodus

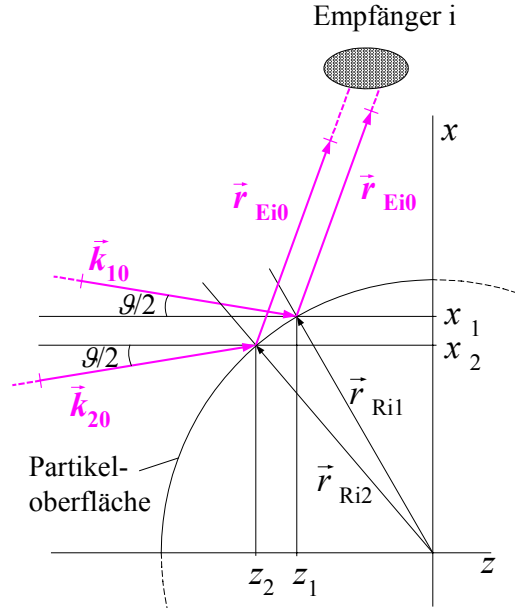


Abb. 1: Reflexion an der Partikeloberfläche

Auf jeder Empfängerapertur überlagern sich die von den Sendestrahlen herrührenden und an den beiden Wechselwirkungspunkten auf der Partikel reflektierten Wellen (vgl. Abb. 1). Der Abstand der Empfänger vom Meßvolumen (Kreuzungsbereich der Laserstrahlen) ist im Vergleich zu den Abmessungen der Partikel sehr groß. Die Empfängerapertur wird als punktförmig angenommen. Damit sind die Richtungsvektoren von den Wechselwirkungspunkten zum Empfänger gleich. Die Lage der Wechselwirkungspunkte ist von den Sendestrahldirectionen sowie von Partikelform und Größe abhängig. Die Phasenverschiebungen der Intensitätssignale sind den optischen Weglängendifferenzen proportional. Dann gilt für die Phasendifferenz der Interferenzsignale der Empfänger Gl. (1), siehe auch Krambeer 2003:

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = k_M \left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\vec{r}_{E10} - \vec{k}_{10} \right) \vec{r}_{R11} - \left(\vec{r}_{E10} - \vec{k}_{20} \right) \vec{r}_{R12} \right] - \\ & - \left[\left(\vec{r}_{E20} - \vec{k}_{10} \right) \vec{r}_{R21} - \left(\vec{r}_{E20} - \vec{k}_{20} \right) \vec{r}_{R22} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

\vec{r}_{Rij} Ortsvektor des Reflexionspunktes des j -ten Laserstrahls auf dem Weg zum i -ten Empfänger auf der Oberfläche der Partikel. Die Reflexionspunkte müssen das Reflexionsgesetz (siehe Haferkorn 2003) erfüllen. Die Normaleneinheitsvektoren \vec{n}_{Rij0} der Reflexionspunkte auf der Partikeloberfläche ergeben sich deshalb zu:

$$\vec{r}_{Ei0} - \vec{k}_{j0} = \sqrt{2(1 - \vec{r}_{Ei0} \vec{k}_{j0})} \cdot \vec{n}_{Rij0} \quad (2)$$

Damit wird aus Gl.(2)

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = k_M \left\{ \begin{aligned} & \left[\sqrt{2(1 - \vec{k}_{10} \vec{r}_{E10})} \cdot \vec{n}_{110} \vec{r}_{R11} - \sqrt{2(1 - \vec{k}_{20} \vec{r}_{E10})} \cdot \vec{n}_{120} \vec{r}_{R12} \right] - \\ & - \left[\sqrt{2(1 - \vec{k}_{10} \vec{r}_{E20})} \cdot \vec{n}_{210} \vec{r}_{R21} - \sqrt{2(1 - \vec{k}_{20} \vec{r}_{E20})} \cdot \vec{n}_{220} \vec{r}_{R22} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die Phasendifferenz der Empfängersignale ist also außer von den Richtungsvektoren der Sendestrahlen und der Empfängerpositionen von den Skalarprodukten der Ortsvektoren der Reflexionspunkte und der Normaleneinheitsvektoren auf der Partikeloberfläche abhängig. Diese werden von der Form der Partikel bestimmt.

1.1 Sphärische Partikel

Für sphärische Partikel mit dem Radius R gilt

$$\vec{r}_{Rij} = R \cdot \vec{r}_{Rij0} \quad (4) \quad \text{und} \quad \vec{r}_{Rij0} = \vec{n}_{Rij0} \quad (5); \quad \text{woraus folgt} \quad \vec{n}_{Rij0} \vec{r}_{Rij} = R \quad (6)$$

wobei der Normaleneinheitsvektor auf der Oberfläche für Reflexion als nach außen gerichtet angesetzt ist. So wird aus Gl. (3)

$$\Delta\Phi = R \cdot k_M \left\{ \left[\sqrt{2(1 - \vec{r}_{E10} \vec{k}_{10})} - \sqrt{2(1 - \vec{r}_{E10} \vec{k}_{20})} \right] - \left[\sqrt{2(1 - \vec{r}_{E20} \vec{k}_{10})} - \sqrt{2(1 - \vec{r}_{E20} \vec{k}_{20})} \right] \right\} \quad (7)$$

Damit ist die Proportionalität zwischen meßbarer Phasendifferenz und Partikelradius ersichtlich, welche die Grundlage der Phasen-Doppler-Anemometrie sphärischer Partikel ist. Zu erkennen ist weiter die Abhängigkeit von den zwischen Sendestrahrichtungen und Empfangsrichtungen eingeschlossenen Winkeln. Dies ermöglicht unter Beachtung der Charakteristik der Lichtstreuung im Raum die Auswahl günstiger Empfängerpositionen, verdeutlicht andererseits aber die Abhängigkeit der Meßgenauigkeit von der stabilen Justage der Empfänger, was bei der Konstruktion von PDA-Meßköpfen zu beachten ist. Bei bezüglich der yz -Ebene symmetrischer Anordnung der Empfänger und Sendestrahlen gilt $\vec{k}_{10} \vec{r}_{E10} = \vec{k}_{20} \vec{r}_{E20}$ und $\vec{k}_{10} \vec{r}_{E20} = \vec{k}_{20} \vec{r}_{E10}$, was Gl. (7) vereinfacht zu

$$\Delta\Phi = 2R \cdot k_M \left\{ \sqrt{2(1 - \vec{r}_{E10} \vec{k}_{10})} - \sqrt{2(1 - \vec{r}_{E10} \vec{k}_{20})} \right\} \quad (8)$$

Mit den Komponenten der Richtungsvektoren \vec{k}_{j0} und \vec{r}_{Ei0} erhält man für eine symmetrische Anordnung die bekannten Formeln von Flögel, siehe Flögel 1987.

1.2 Sphäroide Partikel

Grundlage der Berechnung ist wieder Gl. (3). Die Berechnung der Wechselwirkungspunkte auf der Partikeloberfläche erfordert die Berücksichtigung der Sphäroidgeometrie sowie der Orientierung des Sphäroids im Raum. Der Ortsvektor \vec{r}_{RijS} am Reflexionspunkt und der zugehörige Normaleneinheitsvektor \vec{n}_{Rij0S} der Oberfläche (nach außen orientiert) werden in einem an den Sphäroidachsen ausgerichteten Koordinatensystem x_S, y_S, z_S wie folgt dargestellt

$$\vec{r}_{RijS} = \begin{pmatrix} x_{RijS} \\ y_{RijS} \\ z_{RijS} \end{pmatrix} \text{ mit } z_{RijS} = -b \sqrt{1 - \frac{x_{RijS}^2}{a^2} - \frac{y_{RijS}^2}{b^2}} \quad (9) \quad \vec{n}_{Rij0S} = \begin{pmatrix} n_{Rij0xS} \\ n_{Rij0yS} \\ n_{Rij0zS} \end{pmatrix} \quad (10)$$

und stehen in folgendem Zusammenhang

$$\vec{r}_{RijS} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - (b^2 - a^2) n_{Rij0xS}^2}} \begin{pmatrix} a^2 n_{Rij0xS} \\ b^2 n_{Rij0yS} \\ b^2 n_{Rij0zS} \end{pmatrix} \quad (11) \quad \vec{n}_{Rij0S} = \frac{1}{b \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) x_{RijS}^2}} \begin{pmatrix} b^2 x_{RijS} \\ a^2 y_{RijS} \\ a^2 z_{RijS} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Die Kombination der beiden Gleichungen (11) und (12) ergibt

$$\vec{n}_{Rij0S} \vec{r}_{RijS} = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) n_{Rij0xS}^2} = b \sqrt{1 - \varepsilon^2 n_{Rij0xS}^2} \quad (13)$$

$$\text{mit } \varepsilon^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2} \quad (\varepsilon : \text{numerische Exzentrizität}) \quad (14)$$

Die Orientierung des Sphäroids im Raum wird durch eine Koordinatentransformation mit der Drehmatrix (M) beschrieben, siehe Lock 1996. Wegen der Rotationssymmetrie des Sphäroids um die x_S – Achse genügt die Angabe zweier Drehwinkel, siehe Abb. 2.

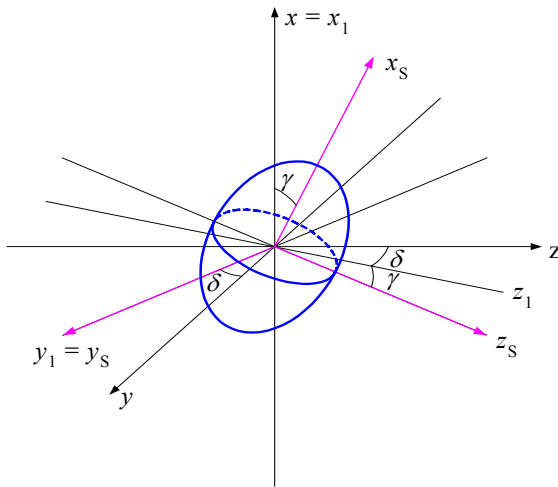


Abb. 2: Sphäroid in beliebiger Orientierung

Es gilt die Transformationsgleichung

$$\vec{r} = (M) \cdot \vec{r}_S \quad (15)$$

mit

$$(M) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ \sin \delta \sin \gamma & \cos \delta & \sin \delta \cos \gamma \\ \cos \delta \sin \gamma & -\sin \delta & \cos \delta \cos \gamma \end{pmatrix}$$

Dabei ist \vec{r} der Ortsvektor im Koordinatensystem des Meßaufbaus, \vec{r}_S der mit dem Achsensystem des Sphäroids verbundene und um die Winkel δ und γ gedrehte Ortsvektor. Es gilt $(M)^{-1} = (M)^T$. Die in den abgeleiteten Beziehungen auf-

tretenden Skalarprodukte $\vec{k}_{j0} \vec{r}_{Ei0}$ sind unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem. Mit dem Reflexionsgesetz Gl. (2) im Sphäroidkoordinatensystem hat man

$$\vec{r}_{Ei0S} - \vec{k}_{j0S} = \sqrt{2(1 - \vec{r}_{Ei0S} \vec{k}_{j0S})} \cdot \vec{n}_{Rij0S} \quad (16.a);$$

$$r_{Ei0Sx} - k_{j0Sx} = \sqrt{2(1 - \vec{r}_{Ei0} \vec{k}_{j0})} \cdot n_{Rij0Sx} \quad (16.b)$$

Die Darstellung dieses Terms in den Koordinaten des Meßsystems lautet

$$r_{Ei0xS} - k_{j0xS} = \vec{m}_1 \cdot (\vec{r}_{Ei0} - \vec{k}_{j0}) \quad (17)$$

\vec{m}_1 : erste Spalte der Transformationsmatrix (M): $\vec{m}_1 = (\cos \gamma \quad \sin \delta \sin \gamma \quad \cos \delta \sin \gamma)^T$.

Damit gilt auf Grundlage von Gl. (3) für ein gedrehtes Sphäroid:

$$\Delta \Phi = bk \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{2(1 - \vec{k}_{10} \vec{r}_{E10}) - \varepsilon^2 [\vec{m}_1 (\vec{r}_{E10} - \vec{k}_{10})]^2} - \sqrt{2(1 - \vec{k}_{20} \vec{r}_{E10}) - \varepsilon^2 [\vec{m}_1 (\vec{r}_{E10} - \vec{k}_{20})]^2} - \\ & - \sqrt{2(1 - \vec{k}_{10} \vec{r}_{E20}) - \varepsilon^2 [\vec{m}_1 (\vec{r}_{E20} - \vec{k}_{10})]^2} + \sqrt{2(1 - \vec{k}_{20} \vec{r}_{E20}) - \varepsilon^2 [\vec{m}_1 (\vec{r}_{E20} - \vec{k}_{20})]^2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Es sind Näherungen für kleine Exzentrizitäten möglich. Die genäherte Darstellung für eine symmetrische Empfängeranordnung ist:

$$\Delta \Phi \approx 2bk \left\{ \begin{aligned} & \left[\sqrt{2(1 - \vec{k}_{10} \vec{r}_{E10})} - \sqrt{2(1 - \vec{k}_{20} \vec{r}_{E10})} \right] - \\ & - \frac{\varepsilon^2 \left[\frac{[\vec{m}_1 (\vec{r}_{E10} - \vec{k}_{10})]^2 + [\vec{m}_1 (\vec{r}_{E20} - \vec{k}_{20})]^2}{\sqrt{2(1 - \vec{k}_{10} \vec{r}_{E10})}} - \frac{[\vec{m}_1 (\vec{r}_{E10} - \vec{k}_{20})]^2 + [\vec{m}_1 (\vec{r}_{E20} - \vec{k}_{10})]^2}{\sqrt{2(1 - \vec{k}_{20} \vec{r}_{E10})}} \right]}{4} \end{aligned} \right\}$$

für $\varepsilon \ll 1$.

(18)

Es bleibt jedoch bei einem nichtlinearen Zusammenhang für die unbekanntenen Größen. Die Messung der Parameter einer Partikel auf dieser Basis erfordert wenigstens vier Meßwerte, also vier Empfängerpaare. Die daraus folgende Notwendigkeit, den entsprechend der Streulichtanalyse ermittelten Bereich möglicher Empfängerpositionen weiter zu unterteilen, führt tendenziell zu stärkeren Auswirkungen von Meßfehlern. Justageproblemen ist durch die Verwendung von Sensorarrays zu begegnen, siehe Schelinsky 2002 und Schelinsky et al 2003. Es ist dann für die Auswertung ein auf der Basis von Gl. (17) oder (18) gebildetes nichtlineares Gleichungssystem (zu lösen, wobei die Startwerte mit $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$, $\gamma = 0$ und $b = R$ gewählt werden können und R aus einem ausgewählten Phasendifferenzmeßwert mit Gl. (7) bzw. (8) ermittelt wird.

2. Brechungsmodus

Der Verlauf eines Strahls durch eine Partikel ist in Abb. 3 skizziert. Die Phase des Interferenzsignals auf dem i -ten Empfänger ist:

$$\Phi_i = \left[-k_M \vec{k}_{10} \vec{r}_{ei1} - k_P \Delta \vec{r}_{i10} (\vec{r}_{ai1} - \vec{r}_{ei1}) - k_M \vec{r}_{E10} (\vec{r}_{E1} - \vec{r}_{ai1}) \right] - \left[-k_M \vec{k}_{10} \vec{r}_{ei2} - k_P \Delta \vec{r}_{i20} (\vec{r}_{ai2} - \vec{r}_{ei2}) - k_M \vec{r}_{E10} (\vec{r}_{E1} - \vec{r}_{ai2}) \right] \quad (19)$$

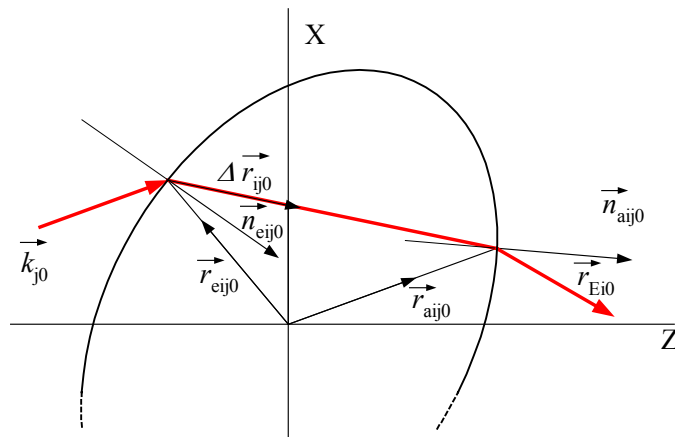


Abb. 3: Strahlengang durch die Partikel bei Brechung

\vec{r}_{eij} , \vec{r}_{aj} Ortsvektoren des Ein- und des Austrittspunktes des j -ten Laserstrahls auf dem Weg zum i -ten Empfänger, k_M , k_P Wellenzahlen im Medium bzw. im Partikelmaterial, $\Delta \vec{r}_{ij0}$ Richtungsvektor des j -ten Laserstrahls zum i -ten Empfänger innerhalb der Partikel:

$$\Delta \vec{r}_{ij0} = \frac{\vec{r}_{aj} - \vec{r}_{eij}}{|\vec{r}_{aj} - \vec{r}_{eij}|} \quad (20)$$

Der Ortsvektor \vec{r}_{Ei} des Empfängers hebt sich in Gl. (19) heraus. Weiterhin wird Gl. (20) in Gl. (19) berücksichtigt:

$$\Phi_i = k_M \left[-\vec{k}_{10} \vec{r}_{ei1} + \vec{k}_{20} \vec{r}_{ei2} + \vec{r}_{E10} (\vec{r}_{ai1} - \vec{r}_{ai2}) \right] - k_P \left(\left| \vec{r}_{ai1} - \vec{r}_{ei1} \right| - \left| \vec{r}_{ai2} - \vec{r}_{ei2} \right| \right) \quad (21)$$

Die Phasendifferenz der Interferenzsignale eines Empfängerpaars ist somit:

$$\Delta \Phi = k_M \left[-\vec{k}_{10} \vec{r}_{e11} + \vec{k}_{20} \vec{r}_{e12} + \vec{r}_{E10} (\vec{r}_{a11} - \vec{r}_{a12}) \right] - k_P \left(\left| \vec{r}_{a11} - \vec{r}_{e11} \right| - \left| \vec{r}_{a12} - \vec{r}_{e12} \right| \right) - \left\{ k_M \left[-\vec{k}_{10} \vec{r}_{e21} + \vec{k}_{20} \vec{r}_{e22} + \vec{r}_{E10} (\vec{r}_{a21} - \vec{r}_{a22}) \right] - k_P \left(\left| \vec{r}_{a21} - \vec{r}_{e21} \right| - \left| \vec{r}_{a22} - \vec{r}_{e22} \right| \right) \right\} \quad (22)$$

Nachfolgend wird das Brechungsgesetz (siehe Haferkorn 2003) sowohl auf die Eintritts- wie auch auf die Austrittsorte angewendet.

$$\text{Eintrittsorte: } k_M \left[\vec{k}_{0j} - \left(\vec{k}_{0j} \vec{n}_{ej0} \right) \vec{n}_{ej0} \right] = k_P \left[\Delta \vec{r}_{ij0} - \left(\Delta \vec{r}_{ij0} \vec{n}_{ej0} \right) \vec{n}_{ej0} \right] \quad (23)$$

$$\text{Austrittsorte: } k_P \left[\Delta \vec{r}_{ij0} - \left(\Delta \vec{r}_{ij0} \vec{n}_{aj0} \right) \vec{n}_{aj0} \right] = k_M \left[\vec{r}_{Ei0} - \left(\vec{r}_{Ei0} \vec{n}_{aj0} \right) \vec{n}_{aj0} \right] \quad (24)$$

wobei die Normaleneinheitsvektoren \vec{n}_{ej0} , \vec{n}_{aj0} dem allgemeinen Strahlenverlauf folgend am Eintrittsorts in die Partikel hinein, am Austrittsort heraus orientiert sein sollen.

2.1 Sphärische Partikel

Für sphärische Partikel kann gesetzt werden

$$\vec{r}_{ej0} = \frac{\vec{r}_{ej}}{R} = -\vec{n}_{ej0} \quad (25)$$

$$\vec{r}_{aj0} = \frac{\vec{r}_{aj0}}{R} = \vec{n}_{aj0} \quad (26)$$

weshalb aus Gl. (20) folgt:

$$\Delta r_{ij0} = \frac{\vec{r}_{aj0} - \vec{r}_{ej0}}{|\vec{r}_{aj0} - \vec{r}_{ej0}|} \quad (27)$$

In Verbindung mit den Gln. (23) und (24) lassen sich nun die Ortseinheitsvektoren der Wechselwirkungspunkte berechnen:

$$\text{Eintrittspunkt: } \vec{r}_{ej0} = - \frac{\vec{k}_{j0} \left(n - \sqrt{2(1 + \vec{k}_{j0} \vec{r}_{Ei0})} \right) + n \cdot \vec{r}_{Ei0}}{\sqrt{2(1 + \vec{k}_{j0} \vec{r}_{Ei0})} \sqrt{1 + n^2} - n \sqrt{2(1 + \vec{k}_{j0} \vec{r}_{Ei0})}} \quad (28)$$

$$\text{Austrittspunkt: } \vec{r}_{aj0} = \frac{\vec{r}_{Ei0} \left(n - \sqrt{2(1 + \vec{k}_{j0} \vec{r}_{Ei0})} \right) + n \cdot \vec{k}_{j0}}{\sqrt{2(1 + \vec{k}_{j0} \vec{r}_{Ei0})} \sqrt{1 + n^2} - n \sqrt{2(1 + \vec{k}_{j0} \vec{r}_{Ei0})}} \quad (29)$$

mit der relativen Brechzahl $n = \frac{k_P}{k_M}$. Mit diesen Beziehungen folgt $\Delta \vec{r}_{ij0}$ zu

$$\Delta \vec{r}_{ij0} = \frac{\vec{k}_{j0} + \vec{r}_{Ei0}}{\sqrt{2(1 + \vec{k}_{j0} \vec{r}_{Ei0})}} \quad (30)$$

Weiter wird aus Gl. (22):

$$\Delta \Phi = 2k_M R \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{1 + n^2 - n \sqrt{2(1 + \vec{k}_{01} \vec{r}_{E10})}} + \sqrt{1 + n^2 - n \sqrt{2(1 + \vec{k}_{20} \vec{r}_{E10})}} - \\ - \left(-\sqrt{1 + n^2 - n \sqrt{2(1 + \vec{k}_{01} \vec{r}_{E20})}} + \sqrt{1 + n^2 - n \sqrt{2(1 + \vec{k}_{02} \vec{r}_{E20})}} \right) \end{array} \right\} \quad (31)$$

Ein symmetrischer Meßaufbau führt zu

$$\Delta\Phi = 4k_M R \left[-\sqrt{1+n^2-n\sqrt{2(1+\vec{k}_{01}\vec{r}_{E10})}} + \sqrt{1+n^2-n\sqrt{2(1+\vec{k}_{20}\vec{r}_{E10})}} \right] \quad (32)$$

Das Einsetzen der Komponenten von \vec{k}_{j0} und \vec{r}_{Ei0} ergeben sich die häufig zitierten Formeln von Flögel für den Brechungsmodus, vgl. Flögel 1987.

2.2 Sphäroide Partikel

Für diesen Fall ist keine geschlossene Darstellung der Phasendifferenz der Empfängersignale in Abhängigkeit von den Geometriedaten des Meßaufbaus und der Partikel erreichbar, wie sie für den Reflexionsmodus für kugel- und ellipsoidförmige Partikel und für den Brechungsmodus für kugelförmige Partikel gegeben sind. Dies liegt daran, daß bei sphäroider Form die Normaleneinheitsvektoren der Oberfläche nichtlinear mit den zugehörigen Ortsvektoren zusammenhängen. Es entfällt damit die bei der Kugel mögliche Vereinfachung Gl. (27) bzw. Gl. (30). Es ist also eine numerische Berechnung der Koordinaten der Wechselwirkungspunkte (Ein- und Austrittspunkte) erforderlich. Die so ermittelten Werte werden in Gl. (22) eingesetzt und ergeben die Phasendifferenzen. Die nachfolgende Darstellung beschränkt sich auf axial ausgerichtete, also in der Strömung „eingeregelt“ Partikel. (Eine Erweiterung für beliebig orientierte Partikel ist nach dem für Reflexion gültigen Muster durchführbar.) Für die Bestimmung der beiden Halbachsen müssen zwei Empfängerpaare verwendet werden, bei beliebig orientierten Partikeln nochmals zwei mehr. Nachfolgend wird das Gleichungssystem für den Verlauf des Sendestrahls \vec{k}_j durch die Partikel hindurch zum Empfänger i des ν -ten Empfängerpaars zusammengestellt:

Phasendifferenz des ν -ten Empfängerpaars ($\nu = 1, 2$):

$$\Delta\Phi_\nu = k_M \left\{ -\vec{k}_{10}\vec{r}_{e11\nu} + \vec{k}_{20}\vec{r}_{e12\nu} + \vec{r}_{E10\nu}(\vec{r}_{a11\nu} - \vec{r}_{a12\nu}) - n \left[|\vec{r}_{a11\nu} - \vec{r}_{e11\nu}| - |\vec{r}_{a12\nu} - \vec{r}_{e12\nu}| \right] \right\} - \quad (33)$$

$$k_M \left\{ -\vec{k}_{10}\vec{r}_{e21\nu} + \vec{k}_{20}\vec{r}_{e22\nu} + \vec{r}_{E20\nu}(\vec{r}_{a21\nu} - \vec{r}_{a22\nu}) - n \left[|\vec{r}_{a21\nu} - \vec{r}_{e21\nu}| - |\vec{r}_{a22\nu} - \vec{r}_{e22\nu}| \right] \right\}$$

Koordinaten von Eintritts- und Austrittspunkt an der Partikeloberfläche im Verlaufe eines Sendestrahls:

$$\vec{r}_{eij\nu} = (x_{eij\nu} \quad y_{eij\nu} \quad z_{eij\nu})^T \quad (34) \quad \vec{r}_{aij\nu} = (x_{aij\nu} \quad y_{aij\nu} \quad z_{aij\nu})^T \quad (35)$$

Für die Normalen-Einheitsvektoren gilt:

$$\vec{n}_{eij0\nu} = \frac{-1}{b\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x_{eij\nu}^2}} \begin{pmatrix} b^2 x_{e\nu} \\ a^2 y_{e\nu} \\ a^2 z_{e\nu} \end{pmatrix} \quad (36) \quad \vec{n}_{aij0\nu} = \frac{1}{b\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x_{aij\nu}^2}} \begin{pmatrix} b^2 x_{a\nu} \\ a^2 y_{a\nu} \\ a^2 z_{a\nu} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Nachfolgend wird der Vektor $\Delta\vec{r}_{ij0}$ mittels Gl. (20) aus den Gln. (23) und (24) eliminiert:

$$\vec{k}_{0j} - (\vec{k}_{0j}\vec{n}_{eij0\nu})\vec{n}_{eij0\nu} = \frac{n}{|\vec{r}_{aij\nu} - \vec{r}_{eij\nu}|} \left\{ \vec{r}_{aij\nu} - \vec{r}_{eij\nu} - [(\vec{r}_{aij\nu} - \vec{r}_{eij\nu})\vec{n}_{eij0\nu}]\vec{n}_{eij0\nu} \right\} \quad (38)$$

$$\vec{r}_{Ei0v} - (\vec{r}_{Ei0v} \vec{n}_{aij0v}) \vec{n}_{aij0v} = \frac{n}{|\vec{r}_{aijv} - \vec{r}_{eijv}|} \left\{ \vec{r}_{aijv} - \vec{r}_{eijv} - \left[(\vec{r}_{aijv} - \vec{r}_{eijv}) \vec{n}_{aij0v} \right] \vec{n}_{aij0v} \right\} \quad (39)$$

Durch Einsetzen der Gln. (36) und (37) in die Gln. (38) und (39) ließe sich die Anzahl der Gleichungen weiter verringern, wodurch jedoch die verbleibenden Gleichungen unübersichtlich werden, weshalb hier darauf verzichtet wird. Die Anwendung der gewonnenen Beziehungen für PDA-Messungen an Sphäroiden, d. h. die Bestimmung der unbekanntem Halbachsenwerte a, b – die relative Brechzahl n sei bekannt – ist in folgender Weise möglich. Bei Verwendung von zwei Sendestrahlen und insgesamt vier Empfängern (in zwei Paaren) ergeben sich je Empfänger vier Wechselwirkungspunkte, also insgesamt 16 unbekannte Ortsvektoren. Es werden je Partikel zwei Phasendifferenzwerte $\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2$ gemessen. Dann ist für die Berechnung der Sphäroidhalbachsen die Gl. (33) für jedes der beiden Empfängerpaare aufzustellen: Gl. (33.1) und Gl. (33.2). Diese sowie die Gln. (36) bis (39) (mit unterschiedlichen Ortsvektoren der Wechselwirkungspunkte) mit insgesamt 50 skalaren Gleichungen sind zu einem System zusammenzufassen und numerisch zu lösen. Als Startwert kann die Gleichheit der Halbachsen bei Berechnung dieses Wertes mittels Gl. (31) bzw. (32) mit einem der Meßwerte angesetzt werden. Eine Erweiterung für beliebig orientierte Partikel ist mit Hilfe zweier weiterer Empfängerpaare möglich (Lösung eines Systems von 100 Gleichungen).

Literatur

- Albrecht, H.-E., Borys, M., Wenzel, M., Wriedt, Th. 1994: Influence of the measurement volume on the phase error in phase Doppler anemometry. Part 1: Reflective mode operation. Part. Part. Syst. Character. Vol. 11, pp. 339 – 344
- Albrecht, H.-E., Borys, M., Damaschke, N., Tropea, C. 2003: Laser Doppler and phase Doppler measurement techniques. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag
- Damaschke, N., Guesbet, G., Grehan, G., Mignon, H., Tropea, C. 1998: Response of phase Doppler anemometer systems to nonspherical droplets. Applied Optics Vol. 37, No. 10, S. 1752-1761
- Doicu, A., Schabel, S., Ebert, F. 1996: Generalized Lorenz-Mie theory for nonspherical particles with applications to phase-Doppler anemometry. Part. Part. Syst. Character. Vol. 13, pp. 79 – 88
- Doicu, A., Wriedt, Th., Bauckhage, K., 1997: Light scattering by homogeneous axisymmetric particles for PDA calculations to measure both axes of spherical particles. Part. Part. Syst. Character. Vol. 14, pp. 3-11
- Flögel, H.H., 1987: Modifizierte Laser-Doppler-Anemometrie zur simultanen Bestimmung von Geschwindigkeit und Größe einzelner Partikeln. Fortschrittberichte VDI , Reihe 3: Verfahrenstechnik Nr. 140. Düsseldorf: VDI Verlag
- Haferkorn, H., 2003: Optik. Physikalisch-technische Grundlagen und Anwendungen. WILEY-VCH Verlag, Weinheim
- Krambeer, H., 2003: Untersuchungen zur Anwendung der Phasen-Doppler-Anemometrie auf sphäroide Partikel im Reflexionsmodus. 11. Gala-Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik. PTB Braunschweig. S. 35.1-35.6
- Lock, J.A., 1996: Ray scattering by an arbitrarily oriented spheroid. I. Diffraction and specular reflection. Applied Optics No. 35, Vol. 3, S. 500 – 514
- Schelinsky, B., 2002: Charakterisierung von Streuteilchen durch laseroptische Meßverfahren mit strukturierten Empfängern. Dissertation. Universität Rostock
- Schelinsky, B.; Krambeer, H., 2003: Use of CCD sensors for two-dimensional optical particle sizing with an extended phase Doppler system. Meas. Sci. Technol. Vol. 14, pp. 500 – 507