

## Geschwindigkeits und Beschleunigungsmessung mittels der „Quasi-Quadratur-Demodulation“

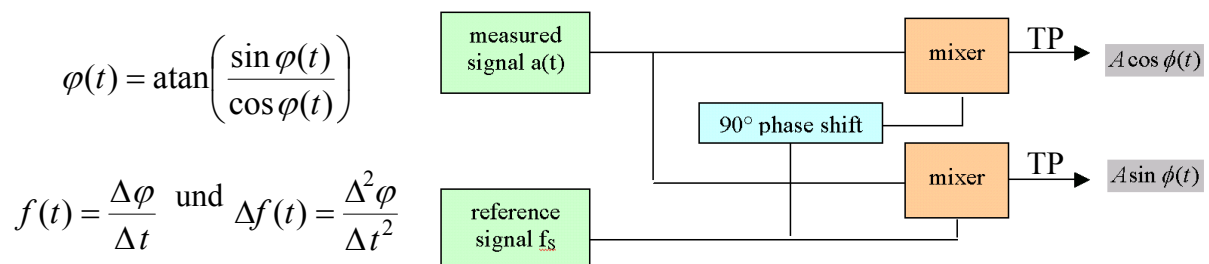
C. Fechtmann

ZARM – Universität Bremen, Am Fallturm, D – 28359 Bremen / Germany

In diesem Beitrag soll ein Verfahren vorgestellt werden, dass eine Bestimmung der instantanen Frequenz für LDA Burst-Signale auch mit nur einer einzigen Eingangsgröße erlaubt, indem das benötigte zweite, um 90° phasenversetzte Signal auf digitalem Wege erzeugt wird. Die Genauigkeit der Bestimmung der Frequenz sowie auch der Frequenzänderung in Abhängigkeit vom Signal-Rauschverhältnis wird anhand von numerischen Daten aufgezeigt.

### Einleitung

Die Quadratur-Demodulation (QDT) ist eine der möglichen Signalverarbeitungstechniken für die Frequenzbestimmung von LDA - Burst-Signalen. Da im Rahmen der GALA bereits vielfach die Eigenschaften, Möglichkeiten und Anwendungen der QDT vorgestellt wurden, soll die normale Quadratur-Demodulation hier nur noch kurz erläutert werden. Die QDT erlaubt im Gegensatz zum FFT-Verfahren die Bestimmung einer "instantanen" Frequenz, was sie für die gleichzeitige Bestimmung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen interessant macht.



Vorraussetzung für den Einsatz der Quadratur-Demodulation ist jedoch das Vorliegen eines Signalpaares mit 90° Phasenversetzung. Dieses kann etwa durch den Einsatz eines Frequenzshiftes  $f_s$  z.B. mittels einer Braggzelle [1], optischer Frequenzdifferenzen [2] bzw. durch Ausnutzung des Frequenzunterschiedes von zwei oder mehr Lasern [3] (Heterodyn-Technik) oder auch durch um zwei phasenversetzte Interferenzstreifenmuster (Homodyn-Technik) erzeugt werden [4]. Im Falle der Heterodyn-Techniken wird das Signal durch die Tiefpassfilterung ins Basisband verschoben und somit unabhängig vom verwendeten Frequenzshift. Dies funktioniert selbst im Falle eines stochastischen Frequenzshiftes, wodurch selbst bei nominell „gleichen“ Frequenzshifffbereichen auf diese Weise die unterschiedlichen Kanäle getrennt werden können [3].

## 5.2

Allen diesen Verfahren ist die Verwendung von einem Signalpaar je Geschwindigkeitskomponente gemeinsam. Die unterschiedliche Phasenbeziehung zwischen den beiden Signalen ermöglicht dann auch die Erkennung der Geschwindigkeitsrichtung bzw. des Vorzeichens der Frequenz / Phasenfunktion, wie in Abb. 2 zu sehen.

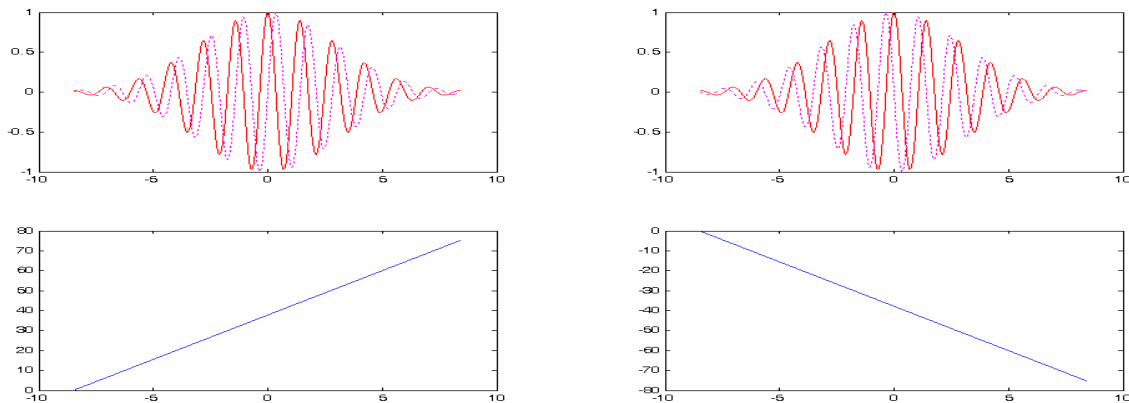


Abb. 2: Positive und negative Phasenfunktion, sowie die dazugehörigen Signalpaare.

Die QDT arbeitet im Zeitraum und ist z.B. mittels einer Look-Up Tabelle ohne großen Aufwand einfach in einem DSP oder FPGA zu implementieren [5]. Es ist außerdem ein sehr schneller Algorithmus  $O(N)$ , d.h. er verfügt über keine Totzeit, sondern kann kontinuierlich betrieben werden, was vor allem für die Analyse von LDA-Signalen in Echtzeit wichtig ist. Hierbei ist bei der QDT eine Messung der Frequenz selbst bei weniger als einer Signalperiode möglich [6]. Die Samplingrate sollte auch nicht zu groß gewählt werden, da es sonst bei sehr langen Signalen zu Integerüberläufen bzw. Rundungsfehlern bei der Berechnung der Frequenz kommen kann.

Im Vergleich dazu liefern Counter-Verfahren nur 2 Werte je Periode und daher eine zu geringe Datenrate für übliche LDA-Burstsignale von ca. 20-30 Perioden im Messvolumen. Bei diesen Verfahren ist häufig selbst der Fehler für die Geschwindigkeitsmessung relativ hoch.

Im Falle der Fast Fourier Transformation (FFT) macht der Integralcharakter der FFT die Bestimmung der Beschleunigungskomponente der Geschwindigkeit schwierig. Eine Möglichkeit der Realisierung wurde vorgeschlagen, indem das Burst-Signal in zwei Hälften gesplittet wird und die Frequenz für jeden dieser Teile einzeln bestimmt wird. Natürlich leidet die Frequenzbestimmung für jeden dieser Teile unter der verringerten Datenbasis, sowie unter der Asymmetrie der aus der Teilung resultierenden Signalhälften [7]. In einem anderen Ansatz wird zusätzlich zum Amplitudenspektrum der FFT auch noch das Phasenspektrum analysiert [8]. Die Genauigkeit der Beschleunigungsmessung ist allerdings in beiden Fällen nur mäßig.

Bei der QDT wird über alle gleichzeitig im Signalpaar auftretenden Frequenzen gemittelt, was speziell bei Doppel- oder Mehrfachbursts bei LDA-Signalen zu einem Problem werden kann. Bei zeitlich gut zu trennenden Bursts kann hier die FFT eine deutlich bessere Frequenztrennung erzielen. Liegen die Bursts aber zeitlich zu dicht

beieinander, so tritt auch hier Interferenz zwischen den jeweiligen Frequenzen auf, die wiederum auch bei der FFT zu fehlerhaft bestimmten Frequenzen bzw. Geschwindigkeiten führt.

Eine bessere Signaltrennung im Frequenz- wie im Zeitbereich lässt sich mit der (diskreten) Wavelet-Transformation (DWT) erzielen. Durch die Eigenschaft der QDT, das Signal ins Basisband transferieren zu können, lässt sich die QDT ideal mit der DWT verbinden. Auf diese Weise können auch im Zeitbereich sehr dicht aufeinander folgende Bursts analysiert werden, solange ihre Frequenzen in unterschiedliche Levels der DWT fallen oder sie zeitlich separierbar sind.

Im Gegensatz zur FFT kennt die QDT auch keine Ensemble-Intervalle, d. h. dass etwa wie bei der FFT immer  $2^k$  Samples für die Analyse benötigt werden. Steht eine Möglichkeit zur Verfügung, die Qualität des Burst-Signals abzuschätzen (etwa durch Betrachtung des Einhüllenden des Bursts oder aus Analyse der DWT-Koeffizienten), so kann eine beliebige Anzahl von Punkten für die Frequenzanalyse herangezogen werden. Diese wird z.B. durch die Verwendung einer mit der Leistung des Signals gewichteten linearen Regression ersten oder zweiten Grades der Phasenfunktion für die Geschwindigkeits- bzw. Geschwindigkeits- und Frequenzbestimmung realisiert.

Wie auch bei den meisten anderen Verfahren, wird bei der QDT die maximale zu analysierende Frequenz durch die Samplingrate begrenzt. Es gilt wie bei der FFT das Nyquist-Theorem, wobei hier die maximal zu ermittelnde Frequenz durch einen Phasensprung von mehr als  $\pm \pi$  von Sample zu Sample gegeben ist.

Die Genauigkeit der Frequenzbestimmung ist nicht nur durch die Cramer-Rao Grenze beschränkt, sondern hängt auch noch von der verwendeten Auflösung der Digitalisierung ab, da ja aus dem Arcustangens des Quotienten der beiden Signalpaare die Phasenfunktion und damit letztendlich die Frequenz bestimmt wird. Die untere Grenze für verwertbare Burst-Signale liegt dabei für die Frequenz bei LDA typischen Signalen meist bei einem SNR von ca. 10 dB. Dies ist aber zum einen abhängig von der Anzahl der signifikanten Samples über die gemittelt wird, zum anderen von der Menge zusätzlichen Rauschens durch die Digitalisierung bzw. Quantisierung. Ferner benötigt die normale QDT benötigt immer ein um  $90^\circ$  phasenverschobenes Signalpaar, was jedoch nicht immer zur Verfügung steht, wenn z.B. nur ein einziger Analog-Digital-Konverter vorhanden ist.

### **Die „Quasi-Quadratur-Demodulation“**

Bei dem hier vorgestellten neuen Verfahren wird eben dieses zweite, phasenverschobene Signal auf digitalem Wege erzeugt. Hierzu wird anstelle des Sinus/Kosinus das gemessene Burstsignal und seine Ableitung als Signalpaar für die Quadratur-Demodulation verwendet wird:

$$\varphi(t) = \operatorname{atan}\left(\frac{b'(\varphi(t))}{b(\varphi(t))}\right)$$

## 5.4

Die Berechnung der Ableitung mittels einer Least-Square Approximation durch ein Polynom 4. Grades aus den gemessenen Burstsignal. Zusätzlich wird auch das Originalsignal  $b(\varphi(t))$  mit diesem Polynom gefittet, um für eine verbesserte Rauschunterdrückung zu sorgen.

Die Realisierung der Ableitungsberechnung mittels eines Savitzky-Golay Filters (speziell Polynom 4. Grades mit 7 Stützstellen) erlaubt eine schnelle Implementation des LSQ-Fits als FIR-Filter [9]. Im nachfolgenden Bild sind sowohl ein Sinus (rot) / Cosinus (blau) Signalpaar, als auch die aus dem Sinussignal berechneten Polynomfits für die 0. (grün) und 1. Ableitung (cyan) sowie die einhüllende Gaußkurve (magenta) dargestellt. Für die Signalberechnung wurden für die hier gezeigten Ergebnisse folgende Funktionen verwendet:  $f(t) = 100 + 200t$ .

$$b(t) = \frac{s(t) + \text{noise}(t)}{1 + 1/\text{SNR}} \text{ mit } s(t) = \sin(2\pi(t - t_0)f(t)) * \exp\left[-\left(\frac{(t - t_0)f(t)}{N}\right)^2\right]$$

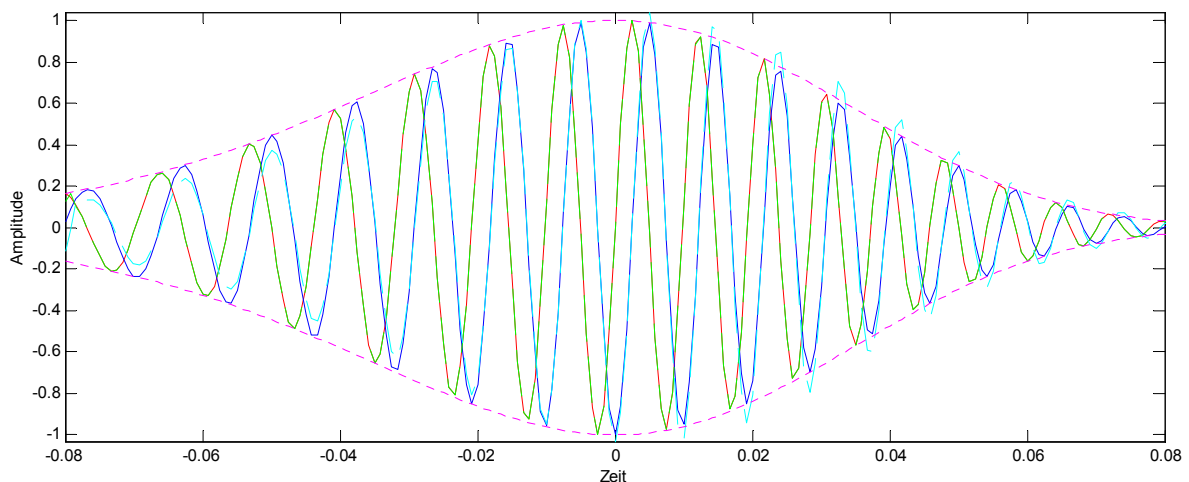


Abb. 3. Sinus (rot) und Kosinus (blau) modulierter Burst (Einhüllende magenta), sowie ein LSQ-Fit des Sinus-modulierten Burstsignals mit einem Polynom 4. Grades und 7 Stützstellen (grün) und seiner ersten Ableitung (cyan) für einen Oversamplingfaktor von 12 und  $N = 5$ .

Dies Verfahren ist somit prinzipiell geeignet, aus nur einem Eingangssignal ein um  $90^\circ$  phasenversetztes Signal zu erzeugen. Jedoch ist wegen des Polynomcharakters der Fitfunktion eine Berechnung der Approximation nur für einen eingeschränkten Bereich des Oversamplingfaktors  $f_s/f$  mit guter Qualität möglich, da sich immer nur der zentrale Bereich der Sinus/Cosinus-Funktion gut approximieren lässt.

Dieses Problem kann aber durch die zusätzliche Verwendung der DWT relativiert werden. Diese passt die Samplingrate des Originalsignals durch das inherente dyadische Downsampling immer wieder entsprechend an die Anforderung des LSQ-Fits an. Von besonderem Interesse für die Implementation ist hierbei der Oversamplingbereich von 8 bis 16 aufgrund des relativ niedrigen mindestens erforderlichen Oversamplingfaktors und der noch geringen Anzahl der benötigten Koeffizienten der Fit-Funktion.

Aus der so ermittelten Phasenfunktion  $\varphi(t)$  wird mittels (gewichteter) linearer Regression über den signifikanten Teil des Signals die mittlere Frequenz, sowie die Änderung der Frequenz innerhalb des Bursts ermittelt:

$$\varphi(t) = \Delta f t^2 + f t + d \quad \text{bzw.} \quad f_b(t) = \frac{\Delta \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta t} t + f$$

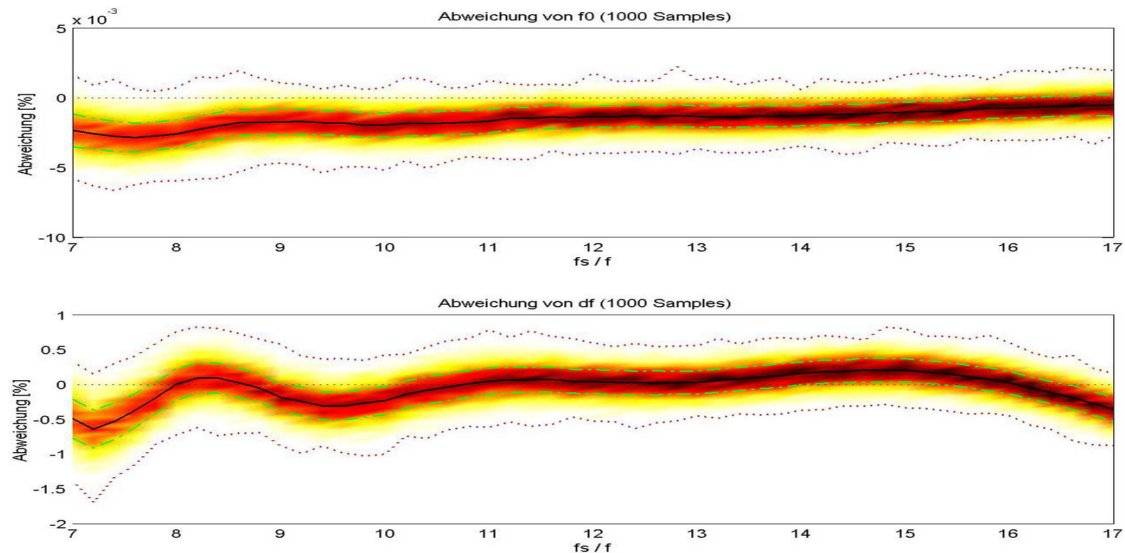


Abb. 4: Mittelwert der Abweichung von der Frequenz  $f$  bzw. der Frequenzänderung  $\Delta f$  (schwarz), sowie das jeweils dazugehörige 99% Konfidenzintervall (grün) und die maximal auftretenden Abweichungen (rot gepunktet) in Abhängigkeit von Oversamplingfaktor  $f_s/f$ . Die Häufigkeitsverteilung der Abweichungen ist farblich codiert von weiß nach dunkelrot.

Im Bild 4 sind die Abweichungen von der Frequenz bzw. der Frequenzänderung in Abhängigkeit vom Oversampling  $f_s/f$  für ein SNR von 40 dB und  $N = 100$  dargestellt. Die Ableitung mittels eines Polynomfits ist jedoch nicht perfekt, weshalb ich dieses Verfahren auch nur als „Quasi“-Quadratur-Demodulation bezeichnen möchte. Der Fehler für die Frequenzbestimmung ist aber deutlich kleiner als die sonst üblichen Messungenauigkeiten für LDA Systeme z.B. aufgrund von Variationen des Interferenzstreifenabstandes innerhalb des Messvolumens. Auch lässt sich der für dieses Verfahren typische, vom Verhältnis von  $f_s / f$  abhängige Bias-Fehler, im nach hinein bei bekannter Samplingrate für jede so bestimmte Frequenz bzw. Frequenzänderung korrigieren, womit der Gesamt-Fehler sich noch weiter reduzieren lässt.

Der Einsatz der diskreten Wavelettransformation (DWT) (oder eines anderen entsprechenden Algorithmus) zur Anpassung der Samplingrate ist für dieses Verfahren aber unvermeidlich. Die DWT hat als dyadischer Bandpassfilter aber auch noch den Vorteil Rauschen aus den übrigen Bändern/Level zu unterdrücken und somit das für die Analyse relevante Signalband zu verbessern. Des Weiteren erlaubt die DWT z.B. mittels Thresholding eines Moving Average der Wavelet-Koeffizienten eine Bursterkennung, sowie das Start / Stop Signal für die Quasi-Quadratur-Demodulations Berechnung, sowie die Wichtungsfaktoren für die lineare Regression bei der Analyse der Phasenfunktion zu liefern.

## 5.6

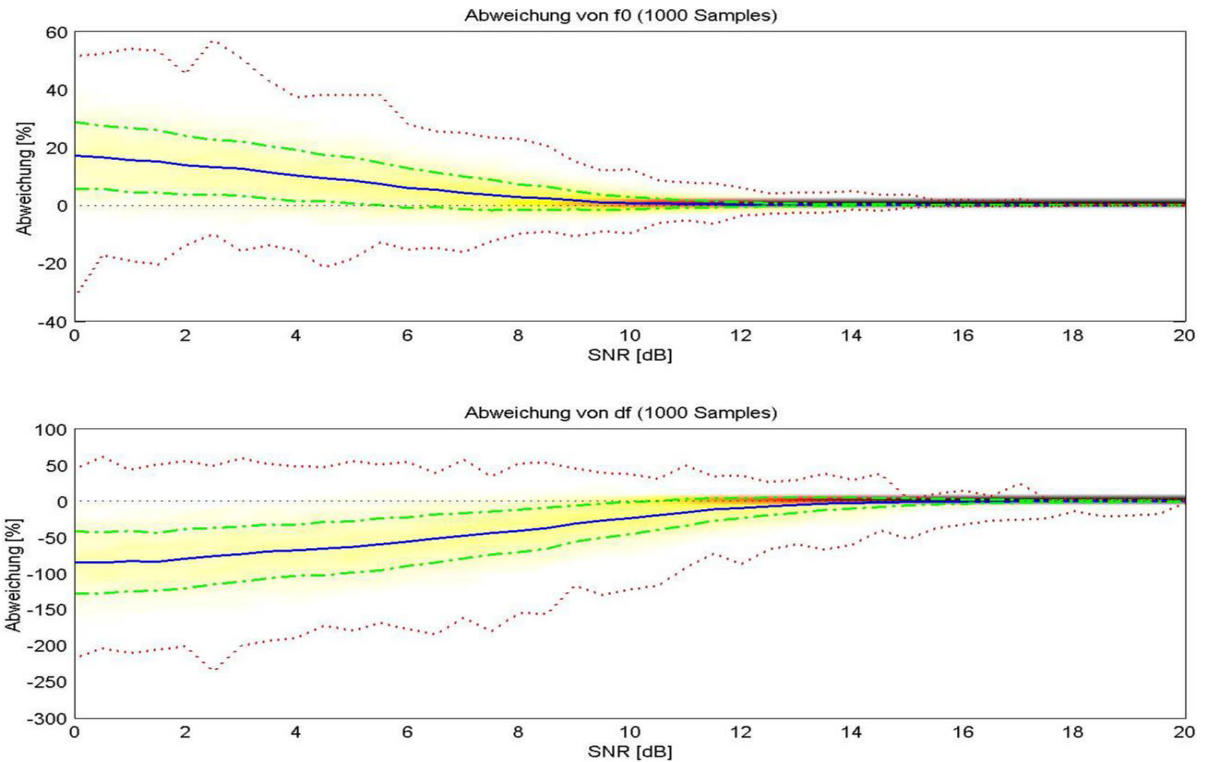


Abb. 5: Mittelwert der Abweichung von der Frequenz  $f$  bzw. der Frequenzänderung  $\Delta f$  (schwarz), sowie das jeweils dazugehörige 99% Konfidenzintervall (grün) und die maximal auftretenden Abweichungen (rot gepunktet) in Abhängigkeit von Signal-Rauschverhältnis SNR. Die Häufigkeitsverteilung der Abweichungen ist wieder farblich codiert dahintergelegt.

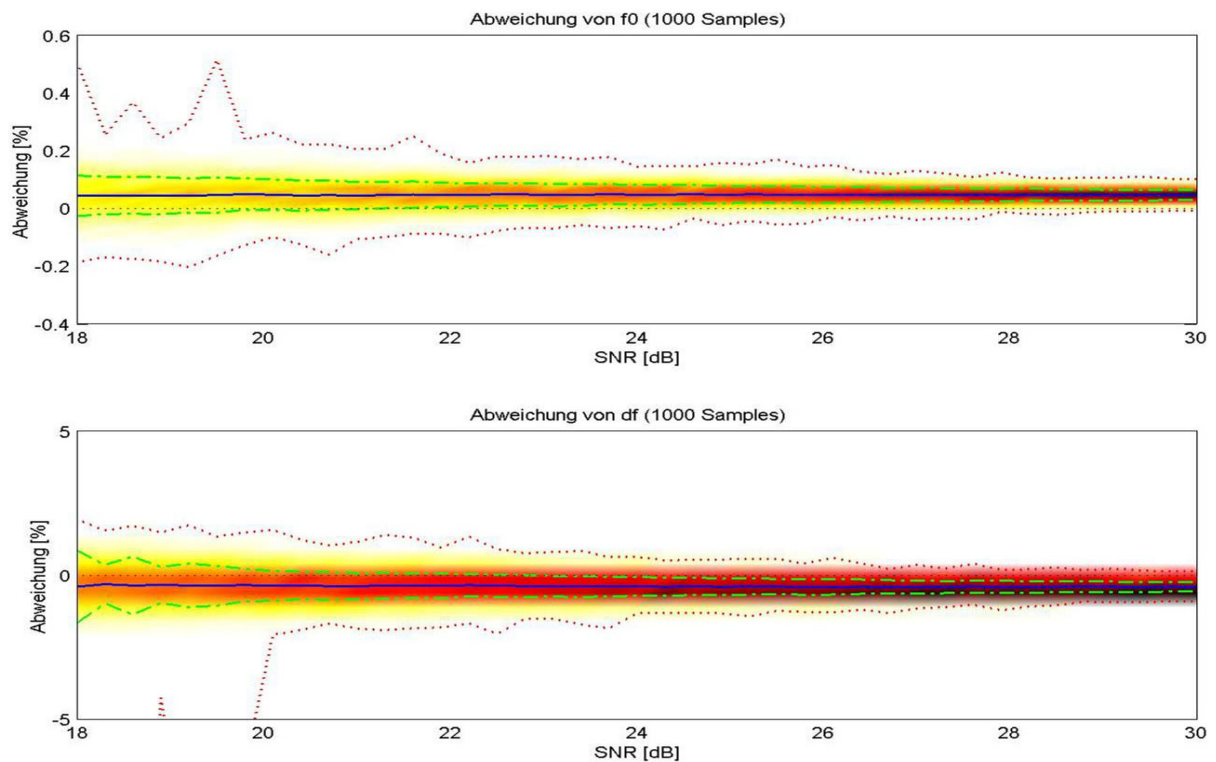


Abb. 6: Mittelwert der Abweichung von der Frequenz  $f$  bzw. der Frequenzänderung  $\Delta f$  für bessere SNR. Die Darstellung ist sonst Analog zur Abbildung 5.

In den Abbildungen 5 und 6 werden die Abweichungen von der Frequenz  $f$  bzw. der Frequenzänderung  $\Delta f$  (schwarz) in Abhängigkeit vom Signal-Rauschverhältnis SNR für einen Oversamplingfaktor von 12 mit  $N = 10$  ohne Korrektur des  $f_s/f$ -Bias und ohne gewichtete lineare Regression dargestellt. Für geringe SNR lässt sich in Abb. 5 schnell abschätzen, dass für Geschwindigkeitsmessungen dieses Verfahren ab dem für die QDT typischen Wert von  $\text{SNR} > 10$  dB einsetzbar ist. Zwar ist der Fehler bei Beschleunigungsmessungen etwa eine Zehnerpotenz größer als für die Geschwindigkeitsmessung, so dass diese erst ab einem  $\text{SNR} > 15$  dB eine akzeptable Abweichung von den Sollwerten aufweist. Dieser Wert ist aber sehr gut im Vergleich zu den bisher mir bekannten Verfahren zur Berechnung der Beschleunigungskomponente. Hierbei ist auch noch zu berücksichtigen, dass dieser Fehler sehr stark von der Anzahl der Perioden bzw. Messpunkte im Messvolumen abhängig ist. Beschleunigungsmessungen sind daher nur für sehr große Messvolumen oder große Geschwindigkeitsgradienten sinnvoll einzusetzen. Letztere treten jedoch in viel mehr technischen Anwendungen auf, als man annehmen würde.

### **Zusammenfassung**

Das hier vorgestellte Verfahren der „Quasi“-Quadratur-Demodulation erlaubt es auch bei nur einer einzigen vorhandenen Eingangsgröße die Möglichkeiten der „normalen“ Quadratur-Demodulation (QDT) zu nutzen. Hierzu wird im Zeitbereich mittels Savitzky-Golay-Filtern das Eingangssignal gefittet und die 0. und 1. Ableitung dieses Fits werden als Signalpaar für die QDT verwendet. Die für dieses Verfahren benötigte Anpassung / Beschränkung auf einen kleinen Bereich von Oversamplingfaktoren wird mittels der diskreten Wavelet-Transformation (DWT) realisiert. Dieses Verfahren ist dann schon ab relativ niedrigen Signal-Rausch-Verhältnissen und auch bei geringen Periodenzahlen im Messvolumen in der Lage brauchbare Ergebnisse für die Frequenzänderung des Burst-Signals zu liefern.

### **Literatur**

- [1] Müller, H., Kramer, R., Dopheide, D.: Interferometrische Messvolumenuntersuchung von LDA-Systemen mit Quadratursignalauswertung, GALA 1996.
- [2] Wang, H., Müller, H., Mickan, B., Pape, N., Dopheide, D.: Faseroptisches Multikomponenten-LDA mit Richtungserkennung auf Basis optischer Frequenzdifferenzen von DBR-Laserdioden, GALA 1996.
- [3] Eggert, M., Grosche, G., Müller, H., Koch, M.: Multi-component LDA using coherence properties of semiconductor lasers, 11th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, July 2002, Lissabon, Portugal, CD-ROM, Session 21, paper 2
- [4] Czarske, J.: Richtungserkennendes Homodyn-Laser-Doppler-Anemometer mit Zweiwellenlängen-Faserlaser, GALA 1999.
- [5] Czarske, J., Dölle, O., Kösters, B., Welling, H.: Realisierung einer Quadratur-Demodulation-Signalverarbeitung mittels digitalem Signalprozessor, GALA 1998.
- [6] Czarske, J.: Zur LDA-Signalverarbeitung mittels Quadratur-Demodulation; GALA 1999.
- [7] Lehmann, B., Helbig, J.: Laser-Doppler-Messung lokaler Beschleunigung in turbulenter Strömung; GALA 1999
- [8] Nobach, H.: Verarbeitung von LDA-Signalen beschleunigter Streuteilchen; GALA 2000.
- [9] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P.: Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> Edition. 1994, S. 650 ff.