

## Untersuchungen zur Anwendung der Phasen-Doppler-Anemometrie auf sphäroide Partikel im Reflexionsmodus

H. Krambeer

Universität Rostock, Institut für Allgemeine Elektrotechnik  
Albert-Einstein-Straße 2, 18051 Rostock

### Einleitung und Zielstellung

Das Phasen-Doppler-Anemometer (PDA) ist ein verbreitetes Meßsystem zur optischen Messung der Geschwindigkeit und des Durchmessers sphärischer Partikel oder Blasen in Strömungen. Bezüglich der Grundlagen und des Standes der Technik wird auf [1] verwiesen. Für kugelförmige Partikel existieren für Streulichtreflexion und -brechung erster Ordnung bei Gültigkeit des strahlenoptischen Modells, d.h. wenn der Partikeldurchmesser viel größer als die Laserlichtwellenlänge ist, analytische Beziehungen zwischen dem Partikeldurchmesser, den Geometriedaten des Meßsystems, der Laserwellenlänge, der Brechzahl (im Brechungsmodus) und der meßbaren Phasendifferenz der Interferenzsignale unterschiedlich positionierter optischer Empfänger. Es läßt sich so der Partikeldurchmesser kalibrierungsfrei aus den Phasenmeßwerten und den übrigen genannten Daten berechnen [6], vgl. auch [1].

Allgemein wird gegenwärtig das Ziel verfolgt, die Anwendbarkeit des PDA auch auf nicht kugelförmige, insbesondere sphäroide Partikel, auszudehnen, mindestens jedoch Abweichungen von der Sphärizität zu erkennen. Diese Aufgabe ist ungleich komplizierter als die Messung sphärischer Partikel, tritt hier doch bei als homogen angenommenen Partikeln im Zentrum des Meßvolumens schon ein Satz von fünf Parametern auf: die Brechzahl, zwei Halbachsenwerte und zwei die Orientierung der Achsen im Raum beschreibende Winkelwerte. Als Grundlage für die Entwicklung entsprechender Meßsysteme sind bisher Streulichtberechnungen für sphäroide Partikel [4,5,7,8,9] und erweiterte Meßaufbauten für die Messung meist orthogonaler Krümmungsradien zur Sphärizitätsvalidation [3] vorgestellt worden.

Nachfolgend werden analytische Beziehungen für die Phasen-Doppler-Anemometrie sphäroider Partikel für den Reflexionsmodus hergeleitet. Auf dieser Grundlage können die theoretischen Potenzen für die Messung von Sphäroid-Parametern beurteilt und die Sphärizität überprüft werden. Es werden einschränkend entsprechend der Strömungsrichtung „eingeregelt“ Partikel betrachtet, d. h. die Lage der Rotationssymmetrieachse des Sphäroids wird als bekannt und parallel zur Strömungsrichtung vorausgesetzt. Dies gilt z. B. für fallende Tropfen sphäroider Form. Für davon abweichende Achsenorientierungen betreffen die Ergebnisse bei geeigneter Anordnung der Empfänger Schnitte durch das Sphäroid.

### Analyse der Reflexion an einem Sphäroid

Die Konfiguration eines Standard-PDA-Systems ist im Bild 1 (folgende Seite) in einem kartesischen  $x, y, z$ -Koordinatensystem schematisch dargestellt [1]. Die Bilder 2 und 3 zeigen ein sphäroides Partikel im Zentrum des Meßvolumens. Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$k$	Wellenzahl des Laserlichts in der kontinuierlichen Phase des Fluids (z. B. Luft)
$\vec{r}_{Ei0}, i = 1, 2$	Einheitsvektoren (Richtungsvektoren) der Empfängerpositionen
$\vec{k}_{j0}, j = 1, 2$	Einheitsvektoren (Richtungsvektoren) der Sendestrahlen
$\vec{r}_{Rij}$	Ortsvektoren der Reflexionspunkte zwischen $j$ -tem Sendestrahls und $i$ -tem Empfänger auf der Partikeloberfläche

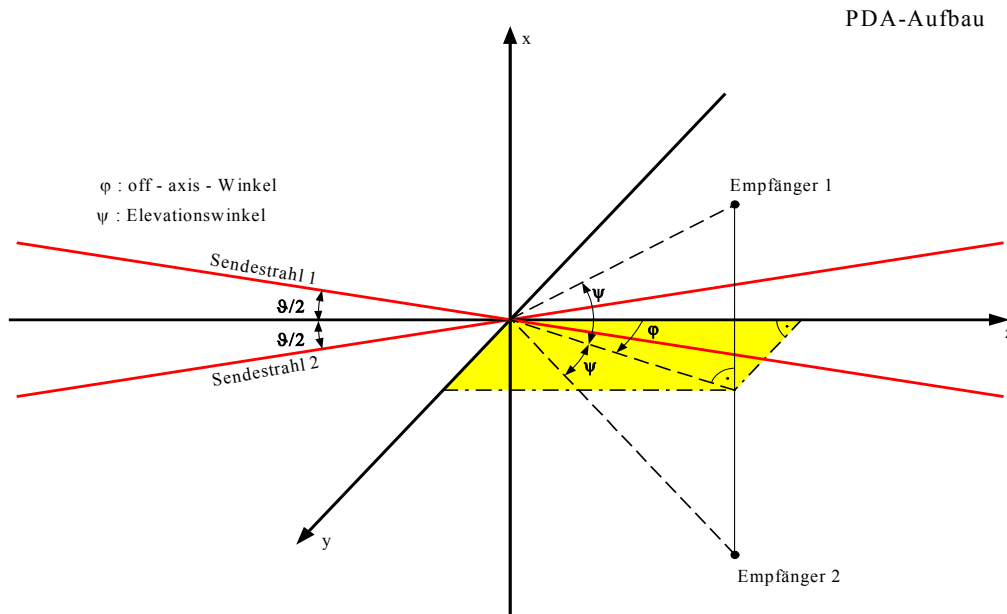


Bild 1: Geometrie des PDA-Meßsystems [1]

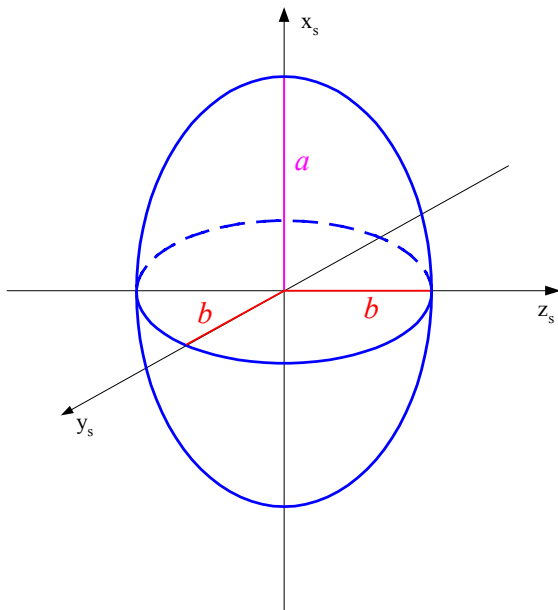


Bild 2: Partikel im Meßvolumenzentrum

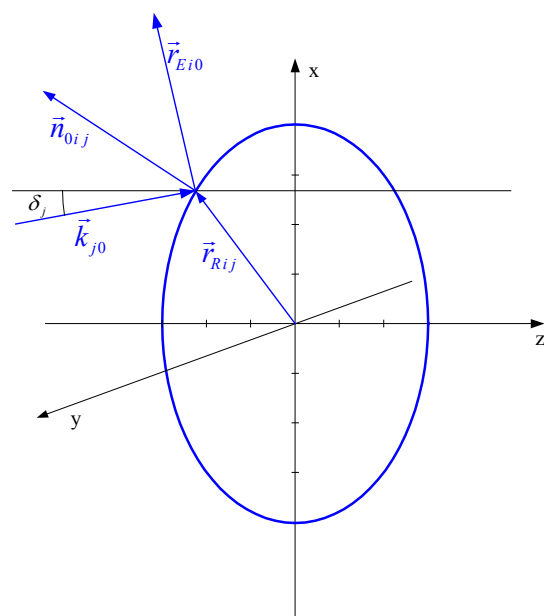


Bild 3 Reflexion an einem Sphäroid

Die durch unterschiedliche optische Weglängen verursachte Phasendifferenz  $\Delta\Phi_{12}$  der Interferenzsignale zweier Empfänger ist:

$$\Delta\Phi_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 \quad (1)$$

mit den Phasenwinkeln

$$\Phi_i = k \left[ \left( \vec{r}_{Ei0} - \vec{k}_{10} \right) \vec{r}_{Ri1} - \left( \vec{r}_{Ei0} - \vec{k}_{20} \right) \vec{r}_{Ri2} \right]; \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

der Interferenzsignale auf den Empfängern [1, 2]: Die Einheitsvektoren  $\vec{k}_{j0}$  der Sendestrahlen und diejenigen der Empfängerpositionen  $\vec{r}_{Ei0}$  sind mit den Daten des PDA-Aufbaus gegeben. Gl. (2) gilt für beliebig geformte Partikel und beliebige Sendestrahls- und Empfängerpositionierung. Die Ortsvektoren der Reflexionspunkte sollen in Abhängigkeit von

der Partikelform berechnet werden. Während für kugelförmige Partikel im Koordinatenursprung Normaleneinheitsvektoren und Ortseinheitsvektoren der Reflexionspunkte auf der Oberfläche identisch sind, trifft dies für Sphäroide (und andere Formen) nicht zu. Für die Berechnung werden das Reflexionsgesetz und die Geometrie des Sphäroids herangezogen. Der Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}_{0ij}$  eines jeden Reflexionspunktes muß zusammen mit dem zugehörigen Sendestrahle  $\vec{k}_{j0}$  und dem Richtungsvektor  $\vec{r}_{Ei0}$  des Empfängers das Reflexionsgesetz erfüllen.

$$\vec{n}_{0ij} = \frac{\vec{r}_{Ei0} - \vec{k}_{j0}}{|\vec{r}_{Ei0} - \vec{k}_{j0}|} = \frac{\vec{r}_{Ei0} - \vec{k}_{j0}}{\sqrt{2(1 - \vec{r}_{Ei0} \cdot \vec{k}_{j0})}}; \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \text{ Empfänger} \\ j = 1, 2 \text{ Sendestrahlen} \end{array} \quad (3)$$

Für den Ortsvektor  $\vec{r}$  der Sphäroidoberfläche gilt

$$\vec{r} = (x \ y \ z)^T = (a \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad b \cdot \cos \beta)^T \quad (4)$$

$\alpha, \beta$  (Winkel-)Parameter,  $a$  Halbachse des Sphäroids in  $x$ -Richtung,

$b$  Halbachsen des Sphäroids in  $y$ - und in  $z$ -Richtung,  $( )^T$  transponierter Vektor

Der Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}_0$  an beliebiger Stelle  $\vec{r}$  der Sphäroidoberfläche wird wie folgt berechnet:

$$\vec{n}_0 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right|} = \frac{(b \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad a \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad a \cdot \cos \beta)^T}{\sqrt{a^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta) + b^2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}} \quad (5a)$$

oder

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} n_{0x} \\ n_{0y} \\ n_{0z} \end{pmatrix} = \frac{1}{b \sqrt{a^4 + (a^2 - b^2)x^2}} \cdot \begin{pmatrix} b^2 x \\ a^2 y \\ a^2 z \end{pmatrix} \quad (5b)$$

Die Werte  $x, y, z$  sind gleichzeitig die Komponenten des auf den Fußpunkt des Normaleneinheitsvektors weisenden Ortsvektors. Man erhält letzteren durch Umstellung von Gl. (5b):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{b^4 + (b^2 - a^2)n_{0x}^2}} \cdot \begin{pmatrix} a^2 n_{0x} \\ b^2 n_{0y} \\ b^2 n_{0z} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Damit der Ortsvektor  $\vec{r}$  einen Reflexionspunkt bezeichnet, werden die Komponenten  $n_{0x}, n_{0y}, n_{0z}$  durch die Gegenüberstellung der Gln. (3) und (5b) berechnet. Man erhält so für den Ortsvektor  $\vec{r}_{Rij}$  eines Reflexionspunktes

$$\vec{r}_{Rij} = \frac{\begin{pmatrix} v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\vec{r}_{Ei0} - \vec{k}_{j0})}{\sqrt{2(1 - \vec{r}_{Ei0} \cdot \vec{k}_{j0}) - (1 - v^2)(r_{Ei0x} - k_{j0x})^2}}; \quad \text{mit dem Achsenverhältnis } v = \frac{a}{b} \quad (7)$$

Die Werte  $\vec{r}_{Rij}$  in Gl. (2) eingesetzt ergibt für den Phasenwinkel  $\Phi_i$  des durch ein Sphäroid verursachten Interferenzsignals auf dem  $i$ -ten Empfänger

$$\Phi_i = k b \left[ \sqrt{2(1 - \vec{r}_{Ei0} \vec{k}_{10}) - (1 - v^2)(r_{Ei0x} - k_{10x})^2} - \sqrt{2(1 - \vec{r}_{Ei0} \vec{k}_{20}) - (1 - v^2)(r_{Ei0x} - k_{20x})^2} \right] \quad (8)$$

Für  $v = 1$  erhält man speziell den für ein kugelförmiges Teilchen mit dem Radius  $a = b = R$  gültigen Zusammenhang:

$$\Phi_{i \text{ Kugel}} = \sqrt{2} k R \left[ \sqrt{1 - \vec{r}_{Ei0} \vec{k}_{10}} - \sqrt{1 - \vec{r}_{Ei0} \vec{k}_{20}} \right] \quad (9a)$$

bzw.

$$\Delta\Phi_{12} = \sqrt{2} k R \cdot \left[ \sqrt{1 - \vec{r}_{E10} \vec{k}_{10}} - \sqrt{1 - \vec{r}_{E10} \vec{k}_{20}} - \left( \sqrt{1 - \vec{r}_{E20} \vec{k}_{10}} - \sqrt{1 - \vec{r}_{E20} \vec{k}_{20}} \right) \right] \quad (9b)$$

Die Gln. (8), (9a) und (9b) gelten für beliebige Empfängerpositionen.

### Herleitung einer Näherung für die Phasendifferenzfunktion

Die numerische Analyse von Gl. (1) in Verbindung mit Gl. (8) mit real möglichen Zahlenwerten zeigt, daß für einen breiten Wertebereich von  $v$  von einem nahezu linearen Zusammenhang zwischen  $\Delta\Phi_{12}$  und  $v$  ausgegangen werden kann (vgl. dazu auch [4].) Es wird deshalb im Interesse vereinfachter Auswertung eine Linearisierung mittels Taylorreihenansatz um den Wert  $v = 1$  herum vorgenommen. Dies ergibt eine genäherte Phase

$$\Phi_{in} = b k \left[ \sqrt{2(1 - \vec{r}_{Ei0} \vec{k}_{10})} - \sqrt{2(1 - \vec{r}_{Ei0} \vec{k}_{20})} + \left( \frac{(r_{Ei0x} - k_{10x})^2}{\sqrt{2(1 - \vec{r}_{Ei0} \vec{k}_{10})}} - \frac{(r_{Ei0x} - k_{20x})^2}{\sqrt{2(1 - \vec{r}_{Ei0} \vec{k}_{20})}} \right) (v - 1) \right] \quad (10)$$

Bei symmetrischer Anordnung der Sendestrahlen und der Empfänger entsprechend Bild 1 gelten die folgenden Beziehungen:

$$\vec{r}_{Ei0} = \{r_{Ei0x}, r_{Ei0y}, r_{Ei0z}\} = \{\pm \sin \psi, \sin \varphi \cdot \cos \psi, \cos \varphi \cdot \cos \psi\}; \text{ "+" für } i = 1, \text{ "-" für } i = 2 \quad (11a)$$

$$\vec{k}_{j0} = \{k_{j0x}, k_{j0y}, k_{j0z}\} = \left\{ \mp \sin \frac{\vartheta}{2}, 0, \cos \frac{\vartheta}{2} \right\}; \quad \text{"-" für } j = 1, \text{ "+" für } j = 2 \quad (11b)$$

Es folgt daraus

$$\vec{r}_{E10} \vec{k}_{10} = \vec{r}_{E20} \vec{k}_{20} \quad \text{und} \quad \vec{r}_{E10} \vec{k}_{20} = \vec{r}_{E20} \vec{k}_{10} \quad (12a), (12b)$$

sowie

$$r_{E10x} - k_{10x} = -(r_{E20x} - k_{20x}) \quad \text{oder} \quad r_{E10x} - k_{20x} = -(r_{E20x} - k_{10x}) \quad (13)$$

$$\Delta\Phi_{12} = 2\sqrt{2} k b \left[ \sqrt{1 - \vec{r}_{E10} \vec{k}_{10} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) (r_{E10x} - k_{10x})^2} - \sqrt{1 - \vec{r}_{E10} \vec{k}_{20} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) (r_{E10x} - k_{20x})^2} \right] \quad (14)$$

Die zugehörige lineare Näherung ist:

$$\Delta\Phi_{12} = 2bk \left[ \sqrt{2(1 - \vec{r}_{E10} \vec{k}_{10})} - \sqrt{2(1 - \vec{r}_{E10} \vec{k}_{20})} + \left( \frac{(r_{E10x} - k_{10x})^2}{\sqrt{2(1 - \vec{r}_{E10} \vec{k}_{10})}} - \frac{(r_{E10x} - k_{20x})^2}{\sqrt{2(1 - \vec{r}_{E10} \vec{k}_{20})}} \right) (\nu - 1) \right] \quad (15)$$

bzw. unter Verwendung der Gln. (11a) und (11b):

$$\Delta\Phi_{12n} = 2bk \left\{ \sqrt{2 \left( 1 - \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \psi \cos \varphi + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \psi \right)} - \sqrt{2 \left( 1 - \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \psi \cos \varphi - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \psi \right)} + \left[ \frac{\left( \sin \frac{\vartheta}{2} + \sin \psi \right)^2}{\sqrt{2 \left( 1 - \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \psi \cos \varphi + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \psi \right)}} - \frac{\left( \sin \frac{\vartheta}{2} - \sin \psi \right)^2}{\sqrt{2 \left( 1 - \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \psi \cos \varphi - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \psi \right)}} \right] (\nu - 1) \right\} \quad (16)$$

Unter Berücksichtigung von  $\sin \frac{\vartheta}{2} \sin \psi \ll 1 - \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \psi \cos \varphi$  erhält man die etwas größere Näherungsbeziehung

$$\Delta\Phi_{12n1} = \frac{2\sqrt{2}bk \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \psi}{\sqrt{1 - \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \psi \cos \varphi}} \left\{ 1 + (\nu - 1) \left[ 2 - \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \psi}{1 - \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \psi \cos \varphi} \right] \right\} \quad (17)$$

Die Bilder 4 und 5 zeigen die Abhängigkeit der Phasendifferenz vom Achsenverhältnis für die exakte Lösung und die Näherungslösungen sowie die relativen Fehler der Näherungslösungen.

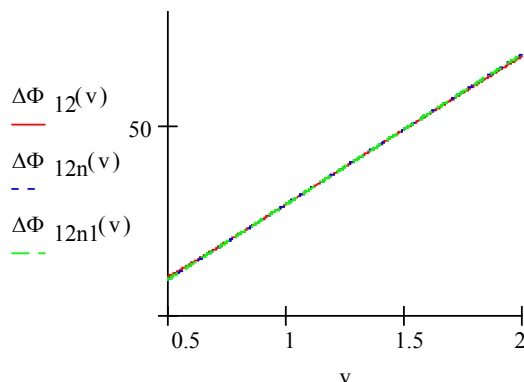


Bild 4: Abhängigkeit der Phasendifferenz vom Sphäroid-Achsenverhältnis

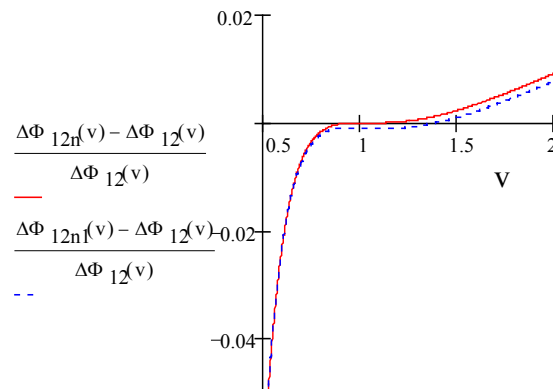


Bild 5: Darstellung der relativen Fehler

## Diskussion

Für die Bestimmung der beiden Parameter  $b$  und  $\nu$  benötigt man mindestens zwei zeitlich zusammengehörige über verschiedenen Empfängerdistanzen ermittelte Phasendifferenz-Meßwerte, also gegenüber dem Standard-PDA ein zusätzliches Empfängerpaar. Dabei ist die Einhaltung der Empfängerpositionen kritisch. Um das Justageproblem möglichst zu

eliminieren, kommt vor allem die Verwendung von CCD-Zeilensensoren in Betracht [9,10]. Es ist dann ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\Delta\Phi_i = A_i b [1 + (v-1) B_i]; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

(z. B. durch Regression) zu lösen, wobei  $n$  die Anzahl der Empfängerpaare ist. Die Werte  $A_i, B_i$  sind durch den Aufbau des Meßsystems gegeben und lassen sich aus Gl. (16)

herleiten. Unter Verwendung von nur zwei Empfängerpaaren können  $v, a$  und  $b$  wie folgt bestimmt werden:

$$v = 1 - \frac{\Delta\Phi_1 A_2 - \Delta\Phi_2 A_1}{\Delta\Phi_1 A_2 B_2 - \Delta\Phi_2 A_1 B_1}; \quad b = \frac{\Delta\Phi_1 A_2 B_2 - \Delta\Phi_2 A_1 B_1}{A_1 A_2 (B_2 - B_1)} \quad (19a), (19b)$$

$$a = v \cdot b \quad (19c)$$

Aus diesen Beziehungen folgt, daß für einen möglichst geringen Fehlereinfluß der Phasemessung die Abstandsdifferenzen zwischen den Empfängern maximiert werden sollten. Damit werden gleichzeitig die Phasendifferenzmeßwerte maximale Unterschiede erreichen. Die Erfüllung dieser Forderung wird beschränkt durch den Winkelbereich, in welchem reflektiertes Streulicht hinreichender Intensität empfangen werden kann.

## Danksagung

Der Autor dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft, welche die Arbeiten im Rahmen des Projekts KR 1968/1-2 gefördert hat.

## Literatur

- [1] Albrecht, H.-E.; Borys, M.; Damaschke, N.; Tropea, C.: Laser Doppler and phase Doppler measurement techniques. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 2003
- [2] Albrecht, H.-E.; Borys, M.; Wenzel, M.; Wriedt, Th.: Influence of the measurement volume on the phase error in phase Doppler anemometry. Part 1: Reflective mode operation. Part. Part. Syst. Charact. 11 (1994) S. 339 – 344
- [3] Damaschke, N.; Guesbet, G.; Grehan, G.; Mignon, H.; Tropea, C.: Response of phase Doppler anemometer systems to nonspherical droplets. Applied Optics 37 (1998) 10, S. 1752-1761
- [4] Doicu, A.; Schabel, S.; Ebert, F.: Generalized Lorenz-Mie theory for nonspherical particles with applications to phase-Doppler anemometry. Part. Part. Syst. Charact. 13 (1996) S. 79 – 88
- [5] Doicu, A.; Wriedt, Th.; Bauckhage, K.: Light scattering by homogeneous axisymmetric particles for PDA calculations to measure both axes of spherical particles. Part. Part. Syst. Charact. 14 (1997) S. 3-11
- [6] Flögel, H.H.: Modifizierte Laser-Doppler-Anemometrie zur simultanen Bestimmung von Geschwindigkeit und Größe einzelner Partikeln. Fortschrittberichte VDI, Reihe 3: Verfahrenstechnik Nr. 140. Düsseldorf: VDI Verlag 1987
- [7] Lock, J.A.: Ray scattering by an arbitrarily oriented spheroid. I. Diffraction and specular reflection. Applied Optics – 35 (1996) 3, S. 500 – 514
- [8] Mishenko, M.I.; Hovenier, J.W.; Travis, L.D.: Light scattering by nonspherical particles. San Diego, London: Academic Press 2000
- [9] Schelinsky, B.: Charakterisierung von Streuteilchen durch laseroptische Meßverfahren mit strukturierten Empfängern. Dissertation. Universität Rostock 2002
- [10] Schelinsky, B.; Krambeer, H.: Use of CCD sensors for two-dimensional optical particle sizing with an extended phase Doppler system. Meas. Sci. Technol. 14 (2003) S. 500 - 507