

## Untersuchungen zur optischen Tiefpassfilterung für die Partikelpositionsschätzung bei Unterabtastung des Sensors und mittels spektraler Analyse

### Investigations of optical low-pass filtering for particle localization using sensor sub-sampling and spectral analysis

**A. Angierski<sup>+</sup>, M. Schaeper\*, R. Kostbade\*, V. Kühn<sup>+</sup>, N. Damaschke\***

Universität Rostock, \* Institut für Allgemeine Elektrotechnik, Albert-Einstein-Str. 2, 18059 Rostock,

<sup>+</sup> Institut für Nachrichtentechnik, Richard-Wagner-Str. 31, 18119 Rostock (Warnemünde)

Optische Filterung, Partikelposition, spektrale Analyse, PTV, PIV

optical filtering, particle position, spectral analysis, PTV, PIV

#### Zusammenfassung

Optische Messsysteme zur visuellen (bildhaften) Untersuchung von Strömungsvorgängen bedienen sich den Vorteilen von Hochgeschwindigkeitskameras. Diese Kameras sind nötig, um schnelle Prozesse sichtbar zu machen. Dabei ist einerseits die Aufnahmedauer durch den endlichen internen Speicher begrenzt, andererseits wird eine große Zeitspanne benötigt, um die Daten vom Kameraspeicher zur Auswerteeinheit zu transferieren. Bei geringen Partikeldichten, wie bei der Partikel Tracking Velocimetry (PTV), tragen ein Großteil der Pixelwerte zu keinem Mehrertrag an Informationen zur Partikelposition bei.

Aus der spektralen Analyse ist bekannt, dass eine Tiefpassfilterung eines Bildes dazu beitragen kann, die Datenmenge für eine Lokalisierung erheblich zu reduzieren. Mit der Filterung wird ein „Verschmieren“ der Partikelinformation über das Pixelbild erreicht, welches dadurch eine Unterabtastung erlaubt. Damit ist es im Idealfall (hohes SNR) möglich, dass beispielsweise für die Lokalisierung von  $K = 5$  Partikeln in einem Abfragefenster mit  $128 \times 128$  Pixeln lediglich  $2(2K+1) = 22$  Pixelinformationen zur Positionsschätzung benötigt werden.

Ziel des Beitrages ist es, die in (Kostbade et al. 2014) dargestellte digitale Filterung der Sensorinformationen zur Unterabtastung in die Optik eines Kamera-Systems zu übertragen. Damit wird die Filterung bereits vor der optisch-elektrischen Wandlung, die im Sensor stattfindet, realisiert. Herausforderungen sind dabei die Auslegung des optischen Tiefpassfilters und die Wiederholung der Bildinformation zur Nachbildung einer zyklischen Faltung in der Sensorebene. Die zyklische Faltung ist eine Voraussetzung zur Positionsbestimmung der Partikel, welches aus deren Spektrum mittels der DFT der Abtastwerte gewonnen wird. Zur Untersuchung der Realisierbarkeit wurden beugungsbasierte Berechnungen durchgeführt sowie optische Amplituden- und Phasenfilter untersucht. Die Simulationen bestätigen die theoretische Möglichkeit einer solchen optischen Filterung zur Reduzierung der Datenmenge. Ergebnisse der Positionsschätzung werden anhand simulierter Daten vorgestellt und mit Ergebnissen der digitalen Filterung verglichen.

## Einleitung

Zur Analyse von Strömungsvorgängen werden im Allgemeinen optische Messtechniken aufgrund der nichtinvasiven Messung bevorzugt. Bei bildbasierten Systemen werden Hochgeschwindigkeitskameras verwendet, wenn eine hohe zeitliche Auflösung benötigt wird. Durch den begrenzten Speicher einer solchen Kamera ist die Zeitspanne einer durchgängigen Analyse stark eingeschränkt. Beispielsweise kann mit einer 1 MPixel Hochgeschwindigkeitskamera bei einer Aufnahmegeschwindigkeit von 6,4kFrames/s und einem internen Speicher von 16 GB eine Bildsequenz mit einer zeitlichen Länge von ca. 2,5 Sekunden aufgenommen werden. Um diesem zeitlichen Nachteil entgegen zu wirken, muss die Ausgangsdatenmenge verringert werden. Um den Versatz zwischen zwei Bildern zu schätzen ist keine Rekonstruktion des Gesamtbildes erforderlich sondern lediglich Kenntnis der Partikelpositionen in jedem Bild. Durch Tiefpassstransformation des Bildes kann diese Information aus nur wenigen Abtastwerten (Pixeln) je Partikel mit hoher Genauigkeit geschätzt werden was zu einer deutlichen Reduzierung der Datenmenge führt. Aus den geschätzten Partikelpositionen kann folglich der Versatz berechnet werden.

Aus der Signalverarbeitung sind Ansätze zur Abtastung dünn besetzter Signale (Finite Rate of Innovation, FRI) bekannt (Marziliano 2001; Vetterli, Marziliano et al. 2002; Maravic und Vetterli 2005). Diese werden auf 2D-Signale erweitert.

Theoretische Betrachtungen zur digitalen Tiefpassfilterung von hochaufgelösten Bilddaten und der nachgeschalteten Unterabtastung wurden von (Kostbade, Angierski et al. 2014) bereits beschrieben. Daran anknüpfend werden Ansätze diskutiert, mit denen sich eine optische Filterung und damit eine Reduzierung der Datenmenge durch eine örtlich niederrartige Abtastung bereits am Sensor realisieren lassen.

## Systembeschreibung

### *Problemstellung / Simulation*

Ausgehend von einer bestimmten Anzahl von Partikeln  $N_p$  in einer beobachteten Ebene, die mit kohärentem Licht beleuchtet wird, können diese als Punktquellen aufgefasst werden. Die Überlagerung dieser Punktquellen kann mathematisch mit

$$\underline{E}(x_0, y_0, 0) = \sum_{N_p} E_{0, n_p} \exp(-j \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{n_p}) \quad (1)$$

beschrieben werden, wobei beschränkend davon ausgegangen werden muss, dass die Anfangsphase jeder Punktquelle identisch ist. Dies kann mit Hilfe einer Durchlichtanordnung und einer ebenen Welle realisiert werden.

Die Ausbreitung der elektromagnetischen Welle kann durch Anwendung des Huygens-Prinzip mit

$$\underline{E}(x, y, z) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \underline{E}(x_0, y_0, 0) \underline{h}(x - x_0, y - y_0, z) dx_0 dy_0 \quad (2)$$

und der Übertragungsfunktion im freien Raum (nach Kirchhoff)

$$\underline{h}(x, y, z) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{\Delta r} \right) \frac{\exp(j k \Delta r)}{\Delta r} \quad \text{mit: } \Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + z^2} \quad (3)$$

erfolgen (Goodman 2005).

Die Transmission einer optischen Linse kann mit

$$t(x, y) = \begin{cases} \exp\left(-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)\right) & \text{für } x^2 + y^2 \leq r_a^2 \\ 0 & \text{für } x^2 + y^2 \geq r_a^2 \end{cases} \quad (4)$$

angegeben werden. Der Radius der Apertur wird dabei mit  $r_a$  angegeben.

Auf Grundlage dieser mathematischen Zusammenhänge wurden die folgenden Berechnungen durchgeführt.

### *Tiefpassfilterung / Spektrale Analyse*

Um die Bildinformation mit weniger Werten ohne Informationsverlust (bezüglich der reinen Partikelpositionen in Verbindung mit Algorithmen zur Positionsschätzung anhand Tiefpassgefilterten Signalen) abtasten zu können, ist die Bandbreite dieser Informationsmenge zu verringern (Nyquist 1928; Shannon 1949). Anders formuliert, es muss die Information eines einzelnen Partikels auf mehrere Pixel verteilt werden, damit diese auch bei einer geringeren örtlichen Abtastung erfasst wird. Hierbei wird die Filterung mittels eines Sum-of-Sinc-Filterkerns

$$G(f_x, f_y) = \sum_{l_x} \alpha_{l_x} \text{sinc}(f_x \tau_x - l_x) \sum_{l_y} \beta_{l_y} \text{sinc}(f_y \tau_y - l_y) \quad (5)$$

vorgenommen (Mishali und Eldar 2011; Tur, Eldar et al. 2011; Angierski, Richter et al. 2012). Die ganzzahligen Werte für  $l_x$  und  $l_y$  sind in den Mengen  $\mathbb{L}_x$  und  $\mathbb{L}_y$  enthalten, die die Position der sinc-Funktionen zueinander beschreiben. Die Ausdehnungen der Sensorfläche werden durch  $\tau_x$  und  $\tau_y$  angegeben.

Um die benötigte Mindestanzahl an Abtastwerten zu erhalten, genügt es, die Anzahl  $K$  an vorkommenden Partikeln festzulegen (Welches sich in der Praxis in Form einer maximal vorkommenden Partikelanzahl festlegen lässt.) und damit das Mindestmaß an benötigten Koeffizienten

$$|\mathbb{L}_x| \geq 2K + 1 \quad \text{und} \quad |\mathbb{L}_y| \geq 2K + 1 \quad (6)$$

und damit auch die benötigte Mindestanzahl an Abtastwerten in der Sensorebene zu erhalten.

## Optische Filterung

Eine zwingende Anforderung an die Filterung ist die zyklische Wiederholung der Bildinformation aufgrund der Anwendung der DFT in der spektralen Schätzung (Angierski und Kuehn 2013). Eine Annäherung kann durch eine Anordnung der Bildinformation links und rechts vom Sensor (sowie oben/unten und diagonal) erreicht werden. Für eine vergleichbare Filterung, wie mit Sum-of-Sinc (SoS) Funktionen, die diskret an den Stellen  $I_x$  und  $I_y$  abgetastet wird (Gleichung 5), ist die diskrete Abtastung im Spektralbereich eine zweite Anforderung. Da die Optik des Messsystems vorrangig ein Vielfaches der verwendeten Wellenlänge des Lichts vom Messort entfernt ist, ist bereits auf der Linsenoberfläche des Objektivs das Fernfeld der beobachteten Szene vorhanden. Das Fernfeld entspricht der Fourier-Transformierten des Prozesses. Das bedeutet, die Tiefpass-Transformation kann direkt auf der Oberfläche der Optik erfolgen. Dies ist in Abbildung 1 in Form einer Transmissionsmaske veranschaulicht. Durch Beugung an den Öffnungen der Maske entsteht durch die Spaltbreite selbst die Einhüllende und durch die Anordnung mehrerer dieser Öffnungen die si-ähnlichen Peaks (Hecht 2005).

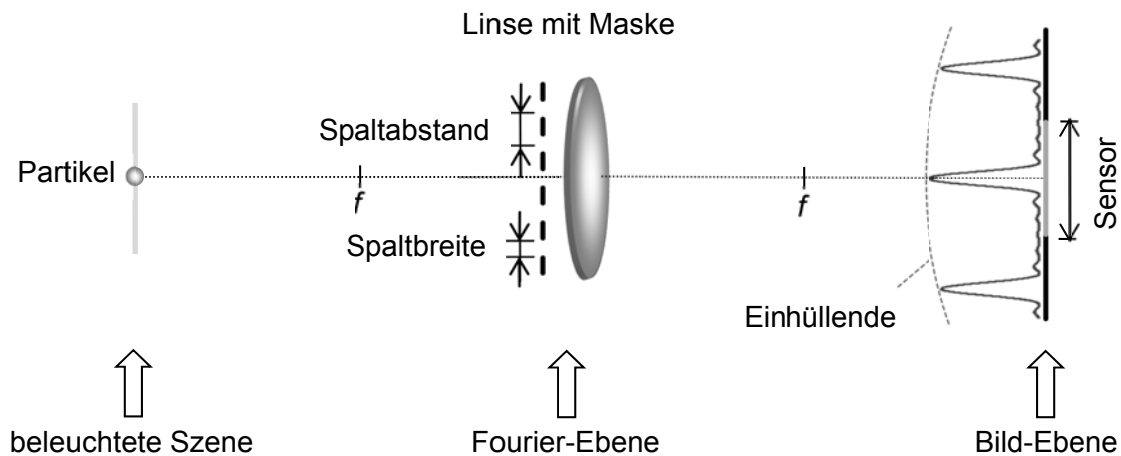


Abb. 1: Schema zur optischen Tiefpassfilterung mittels eines Transmissionsgitters

Einschränkungen mussten in der Größe der beobachteten Szene vorgenommen werden, aufgrund begrenzter Rechenkapazität für die Beugungsberechnung.

Als Beispielwerte dienen die folgenden Parameter:

- Partikel als Punktquelle nach Formel (1)
- Brennweite der Linse:  $f = 50\text{mm}$
- Abbildungsmaßstab:  $M = 1$
- Filtermaske:
  - Spaltbreite:  $b = 10\ \mu\text{m}$
  - Spaltabstand:  $a = 53,2\ \mu\text{m}$
  - Anzahl der Öffnungen:  $M \times N = 11 \times 11$
- Sensorgröße:  $1024 \times 1024\ \mu\text{m}$  (entspricht:  $128 \times 128$  Pixel bei Pixelabstand:  $8\ \mu\text{m}$ )

Die Implementierung der Filterfunktion wurde durch Erweiterung der entsprechenden Funktion der Transmissionsfunktion der Linse (4) nach

$$t(x,y) = \begin{cases} A_F(x,y) \exp\left(-j\left[\frac{k}{2f}(x^2 + y^2) + \varphi_F(x,y)\right]\right) & \text{für } x^2 + y^2 \leq r_a^2 \\ 0 & \text{für } x^2 + y^2 \geq r_a^2 \end{cases} \quad (7)$$

vorgenommen. Hierbei wird die Transmission der Filtermaske durch  $A_F(x,y)$  und die Beeinflussung der Phase durch  $\varphi_F(x,y)$  möglich. Zunächst wurde die Transmission an die Form eines SoS-Filters angepasst.

### *Rechteckmaske*

Beim Rechteckfilter wird ein SoS-Filter direkt nachgebildet, indem die Öffnungen der Transmissionsmaske (vgl. Abbildung 2) mit gleichem Transmissionskoeffizienten realisiert werden.

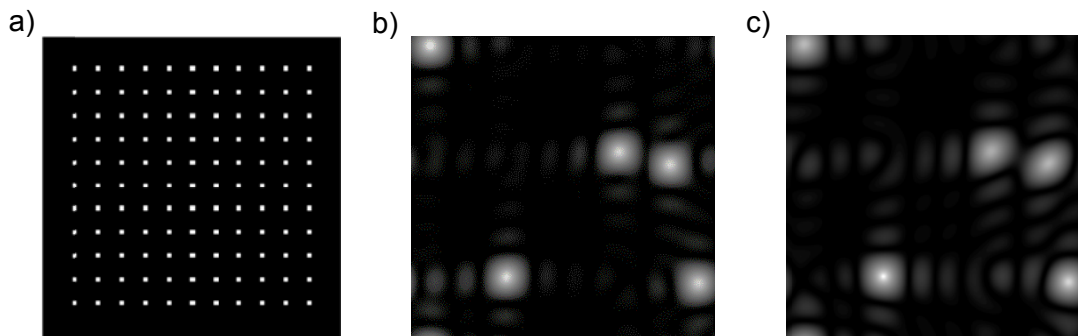


Abb. 2: Transmissionsmaske rechteckförmige Maske mit  $M \times N = 11 \times 11$  (a) und Berechnung für fünf Punktquellen: Bild der Beugungssimulation (b), Bild aus Berechnung mittels SoS-Filter (c)

Bei der Filterung mittels rechteckförmiger Transmissionsfunktion ergibt sich bei kohärenter Beleuchtung die Interferenz zwischen den Beugungsbildern verschiedener Partikelpositionen. Durch den Sensor wird eine Betragsbildung der Feldstärke vorgenommen, wodurch die Phaseninformation verloren geht. Diese ist im Allgemeinen jedoch erforderlich um aus dem Interferenzmuster die notwendige Information zu den Partikelpositionen zu erhalten.

### *Pyramidenförmige Maske*

Ziel einer Maske mit pyramidenförmiger Transmissionsabnahme ist die direkte Nachbildung der Dreiecksverteilung aus (Kostbade, Angierski et al. 2014). Die Simulation dieses Filters ist in Abbildung 3 dargestellt. Hierbei wird der Vorteil einer stets positiven Überlagerung der Feldstärken genutzt. Dadurch kann bei gleichzeitiger Annahme einer Durchlicht-Beleuchtung mit ebenen Wellen von einer rein konstruktiven Überlagerung der Wellen einzelner Partikel ausgegangen werden.

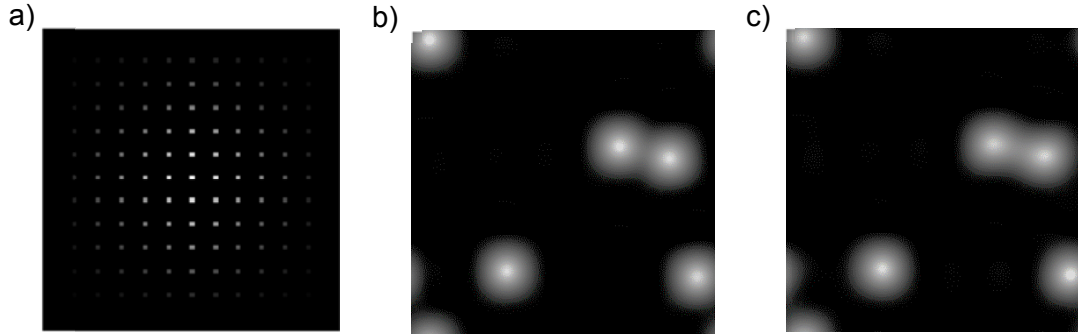


Abb. 3: Transmissionsmaske pyramidenförmige Maske mit  $M,N=11$  (a) und Berechnung für fünf Punktquellen: Bild der Beugungssimulation (b), Bild aus Berechnung mittels SoS-Filter (c)

Auch hier geht durch die Betragsbildung am Sensor die Phaseninformation verloren. Jedoch ist die Phase in diesem Aufbau über das gesamte Bild konstant (nur durch die Beleuchtung nicht durch die Partikelpositionen bestimmt) und trägt somit keine Informationen zu den Partikelpositionen.

### Ergebnisse und Diskussion

Die Auswertung der Simulationsergebnisse wurde mittels 2D Unitary ESPRIT Algorithmus (Haardt, Zoltowski et al. 1995; Haardt, Zoltowski et al. 1997) vollzogen. Für die Schätzgenauigkeit bezüglich der Partikelposition wird ein auf die Bildgröße normierter quadratischer Fehler mit

$$\mathcal{E} = \left( \frac{\hat{x}_p - x_p}{\tau_x} \right)^2 + \left( \frac{\hat{y}_p - y_p}{\tau_y} \right)^2 \quad (8)$$

bestimmt, wobei  $\hat{x}_p$  und  $\hat{y}_p$  die Koordinaten der jeweiligen geschätzten Partikelpositionen wiedergibt. Für eine Vergleichbarkeit zu vorhergehenden Ergebnissen (Kostbade, Angierski et al. 2014) wurde die Anzahl an Abtastwerten auf  $41 \times 41$  gesetzt.

Die in Abbildung 4 dargestellten Ergebnisse beziehen sich auf  $10^3$  Einzelrealisierungen aus der Beugungssimulation mit zufälligen Partikelpositionen (gleichverteilt) unter Verwendung der vorgestellten Filterfunktionen. Bei der Filterung mit rechteckförmiger Amplitudenabhängigkeit der Koeffizienten ist gegenüber der pyramidenförmigen (Dreieck) Funktion eine um eine Größenordnung verringerte Schätzgenauigkeit offensichtlich. Dies kann mit dem vorher beschriebenen Verlust der Phaseninformation durch die Intensitätsbildung im Sensor begründet werden.

Für die Schätzgenauigkeit bezüglich der jeweiligen Partikelposition kann der Wert von  $10^{-4.5}$  multipliziert mit einer Pixelanzahl von 128 je Richtung mit 0,5Pixel angegeben werden. Mittels Filterung des pyramidenförmigen Filters ergibt sich aus der Häufigkeit des quadratischen Fehlers  $10^{-5.5}$  eine mittlere Schätzgenauigkeit beim vorliegenden Sensor von 0,05Pixel.

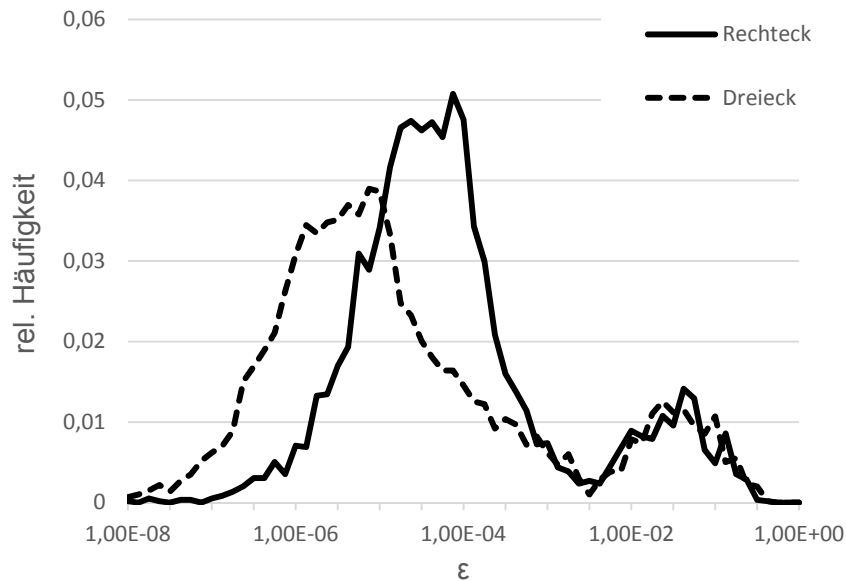


Abb. 4: Häufigkeit des quadratischen Fehlers  $\varepsilon$  normiert auf die Sensorabmessung ( $\tau_x, \tau_y$ )

Bezugnehmend zu den Ergebnissen der Anwendung eines SoS-Filters auf reine Pixeldaten (Kostbade, Angierski et al. 2014) ist festzustellen, dass durch die Beugungssimulation optische Effekte eingehen, die eine geringe Erhöhung des Schätzfehlers in der Positionsschätzung zur Folge haben. So war hier eine annähernd gleiche theoretische Schätzgenauigkeit von  $10^{-5,75}$  und somit von 0,03 Pixel erzielt worden. Weiterhin sind die Pixelapertur des Sensors und Rascheinflüsse bei den vorliegenden Ergebnissen zur Vereinfachung nicht betrachtet worden, die in zukünftige Simulationen einfließen werden.

## Dankesworte

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre Förderung des DFG-Projektes DA600/4-1 und KU1221/17-1: „Geschwindigkeitsschätzung für dünn besetzte Bildsequenzen“.

## Literatur

- Angierski, A. und V. Kuehn (2013). High Resolution Particle Detection via Spectral Estimation. Systems, Communication and Coding (SCC), Proceedings of 2013 9th International ITG Conference on, München, Germany.
- Angierski, A., H. Richter, V. Kühn und N. Damasche (2012). "Extension of SoS Sampling Kernels for 2-D FRI Problem." Electronics Letters **48**: 527-528.
- Goodman, J. W. (2005). Introduction to Fourier Optics, Roberts & Company.
- Haardt, M., M. Zoltowski, C. Mathews und J. Nossék (1995). 2D Unitary ESPRIT for Efficient 2D Parameter Estimation. Proc. of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Detroit, MI, USA.
- Haardt, M., M. Zoltowski, C. Mathews und J. Ramos (1997). ESPRIT and Closed-Form 2-D Angle Estimation with Planar Arrays. The Digital Signal Processing Handbook. FL, USA, Madisetti, V.K. und Williams, D.B., Boca Raton.
- Hecht, E. (2005). Optik, 4., überarbeitete Auflage. München, Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH.

- Kostbade, R., A. Angierski, M. Schaeper, V. Kühn und N. Damaschke (2014). Schätzung der Partikelposition mittels spektraler Analyse aus reduzierten Datenmengen. Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik. Karlsruhe.
- Maravic, I. und M. Vetterli (2005). "Sampling and Reconstruction of Signals With Finite Rate of Innovation in the Presence of Noise." IEEE Transactions on Signal Processing **53**: 2788-2805.
- Marziliano, P. (2001). Sampling Innovations. Lausanne, Schweiz, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL).
- Mishali, M. und Y. C. Eldar (2011). "Sub-Nyquist Sampling: Bridging Theory and Practice." IEEE Signal Processing Magazine **28**: 98-124.
- Nyquist, H. (1928). "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory." Transactions of the American Institute of Electrical Engineers **47**: 617-644.
- Shannon, C. E. (1949). Communication in the Presence of Noise. Proc of the IRE.
- Tur, R., Y. C. Eldar und Z. Friedman (2011). "Innovation Rate Sampling of Pulse Streams With Application to Ultrasound Imaging." IEEE Transactions on Signal Processing **59**: 1827-1842.
- Vetterli, M., P. Marziliano und T. Blu (2002). "Sampling Signals With Finite Rate of Innovation." IEEE Transactions on Signal Processing **50**: 1417-1428.