

## LDA-Korrelations- und Spektralschätzung — Ein Zwischenstand

### LDV correlation and spectral density estimation — An interim review

**H. Nobach**

Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation, Am Faßberg 17, 37077 Göttingen

LDA, stochastische Abtastung, Autokorrelation, Leistungsdichtespektrum, Turbulenz

LDV, stochastic sampling, autocorrelation, spectral density, turbulence

#### Zusammenfassung

Es wird eine Systematisierung der verfügbaren Verfahren zur Bestimmung von Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektren aus Strömungsmessungen mittels der Laser-Doppler-Anemometrie und ihrer speziellen Vorzüge und Einschränkungen gegeben. Dabei werden kürzliche Weiterentwicklungen der Verfahren besonders hervorgehoben und ein direkter Vergleich der erreichten Schätzqualität der verschiedenen Verfahren gegeben. Es wird gezeigt, dass sich damit die Ergebnisse der Verfahren annähern, ein Indiz für die konvergierende Effizienz der Verfahren bei der Nutzung der durch die Messdaten zur Verfügung stehenden Information.

#### 1 Einführung

Beim Einsatz der Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) in turbulenten Strömungen entstehen ungleichmäßig abgetastete Datensätze mit einer Korrelation der momentanen mittleren Datenrate mit der Geschwindigkeit und überlagertem Rauschen. Die Berechnung der Autokorrelationsfunktion und des Leistungsdichtespektrums der turbulenten Strömung aus diesen Daten erfordert Berechnungsverfahren, die die speziellen Eigenschaften der Daten berücksichtigen. In den letzten Jahren wurden viele solche Verfahren entwickelt und schrittweise weiterentwickelt. Sie lassen sich in drei Klassen von Verarbeitungsstrategien einteilen.

- Slotkorrelation: Aus den ungleichmäßig abgetasteten Messdaten wird eine Korrelationsfunktion berechnet. Da die zeitliche Distanz der Messwerte zufällig ist, lassen sich für eine bestimmte zeitliche Verschiebung nicht sicher passende Messwertpaare finden. Deshalb werden die zeitlichen Abstände der Messwerte über Klassen einer bestimmten Breite gemittelt. Beispiele solcher Schätzer sind in [10, 16, 17, 27, 28, 29, 30, 33] zu finden, incl. der Datengewichtung zur Reduktion systematischer Fehler durch die Korrelation der mittleren Messrate und der Geschwindigkeit [5, 20, 21] und weiterer, optionaler Erweiterungen wie der lokalen Normierung [32, 34] oder weiche Klassenübergänge (fuzzy slotting) [25]. Mittels der Fourier-Transformation wird abschließend aus der Korrelationsfunktion ein Leistungsdichtespektrum bestimmt.
- Direkte Spektralschätzung: Aus den ungleichmäßig abgetasteten Messdaten wird direkt ein Spektrum bestimmt. Beispiele solcher Schätzer sind in [5, 11, 12, 13], wobei neben der Korrektur des systematischen Fehlers durch die zufällige Abtastung [11] auch Wichtungsverfahren realisiert wurden [12, 13, 35], speziell die Aufenthaltszeit-Gewichtung (transit-time weighting, TT). Kürzlich wurden weitere Detailverbesserungen für dieses Schätzverfahren erzielt [22], nämlich die Vorwärts-rückwärts-Ankunftszeit-Gewichtung (forward-backward arrival-time weighting, FBAT) [20, 21], die Korrektur des Wrap-around-Fehlers, des Einflusses von Totzeiten des Messgerätes

[6, 22], eine Bessel-Korrektur und die zeitliche Beschränkung der Korrelationsfunktion als eine Alternative zur Blockmittelung.

- Interpolation: Aus den ungleichmäßig abgetasteten Messdaten wird zunächst durch Interpolation eine kontinuierliche zeitliche Funktion der Geschwindigkeit bestimmt, die dann äquidistant wiederabgetastet wird. Dieser Datensatz kann dann mit klassischen Signalverarbeitungsverfahren für regelmäßig abgetastete Daten weiterverarbeitet werden. Durch die spektralen Eigenschaften der Interpolation im Zusammenwirken mit der vorher ungleichmäßigen Abtastung entstehen systematische dynamische Fehler, die korrigiert werden können. Beispiele solcher Schätzer mit der Analyse oder der Korrektur dieses Fehlers für verschiedene Interpolationsvorschriften sind in [3, 18, 26, 31] zu finden und eine Korrektur von Datenrauschen in [24, 26].

Da die drei Verarbeitungsklassen unterschiedliche Annahmen über die Daten machen und die Information des Datensatzes unterschiedlich effektiv nutzen, sind die Vergleichbarkeit und universelle Anwendbarkeit der Methoden nur eingeschränkt gegeben und die Ergebnisse (Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektren) zeigen unterschiedliche Abhängigkeiten von Fehlereinflüssen. Bisher wurden v. a. die Interpolation und die Slotkorrelation verwendet. Die direkte Spektralschätzung, auch wenn sie als erstes praktisch nutzbares Verfahren zur Spektralschätzung von ungleichmäßig abgetasteten Datensätzen der LDA-Messtechnik entwickelt wurde, findet wenig Verbreitung. Die jüngsten Entwicklungen zeigen aber, dass die Adaption von optimierten Verarbeitungsschritten zwischen den verschiedenen Verarbeitungsklassen zu sehr ähnlichen Ergebnissen führen kann [22], was ein Zeichen dafür ist, dass der Informationsgehalt des vorliegenden Datensatzes von den entwickelten Verfahren ähnlich gut und vollständig genutzt wird.

Die folgenden Abschnitte geben eine Systematisierung der verfügbaren Schätzverfahren und ihrer speziellen Vorzüge und Einschränkungen, incl. kürzlicher Weiterentwicklungen sowie einen direkten Vergleich der erreichten Schätzqualität der verschiedenen Verfahren. Praktische Realisierungen der hier verwendeten Schätzverfahren sind als Python-Programme frei unter [1] erhältlich.

## 2 Verfahren

Die drei Klassen der Verarbeitung von LDA-Datensätzen zu Schätzungen der Korrelationsfunktion und des Leistungsdichtespektrums, die direkte Spektralschätzung, die Slotkorrelation, und das Interpolationsverfahren wurden lange unabhängig voneinander entwickelt und konnten nur alternativ angewendet werden. Vorteilhafteste Verarbeitungsschritte einzelner Verfahren blieben auf diese Verfahren beschränkt. Kürzliche Untersuchungen und Weiterentwicklungen, insbesondere der direkten Spektralschätzung [22] haben jedoch mögliche Querverbindungen aufgedeckt und gezeigt, dass große Teile der Datenverarbeitungskette evtl. mit notwendigen Modifikationen, aber prinzipiell auf alle Verfahren anwendbar sind. In Abb. 1 ist der Signalfluss der LDA-Datenverarbeitung dargestellt, der diese Gemeinsamkeiten verdeutlicht. Während früher die verschiedenen Verfahren die gesamte Verarbeitungskette umfassten, wird jetzt deutlich, dass der entscheidende Unterschied zwischen den Verfahren nur in der Bestimmung der primären Korrelationsfunktionen (der evtl. gewichteten Geschwindigkeiten und der Korrelationsfunktion der evtl. gewichteten Abtastfunktion) besteht.

### 2.1 Vorverarbeitung

Ein bisheriger Hauptnachteil der direkten Spektralschätzung war die mit längeren Datensätzen nicht abnehmende Schätzvarianz der spektralen Leistungsdichte. Ein längerer Datensatz führt zu einer höheren spektralen Auflösung bei unveränderter Varianz der einzelnen Werte. Deshalb braucht die direkte Spektralschätzung weitere Verarbeitungsschritte, wie z. B. die Blockmittelung (Bartlett-Methode), überlappende Blöcke (Welch-Methode) oder die Mittelung über mehrere spektrale Werte (Glättung des Spektrums). Diese Verfahren setzen ausnahmslos Erfahrungen voraus, um einen guten Kompromiss zwischen systematischen und zufälligen Fehlern zu erhalten. Während die zufälligen Fehler mit kleinerer Blockgröße wegen der zunehmenden Blockzahl abnehmen, nehmen systematische Fehler durch die Interpretation des Datenblocks als Ausschnitt eines periodischen Signals (Wrap-around-Fehler) und für besonders kurze Blöcke die nicht abgeklungene Korrelation über der Blocklänge zu. Außerdem kommt

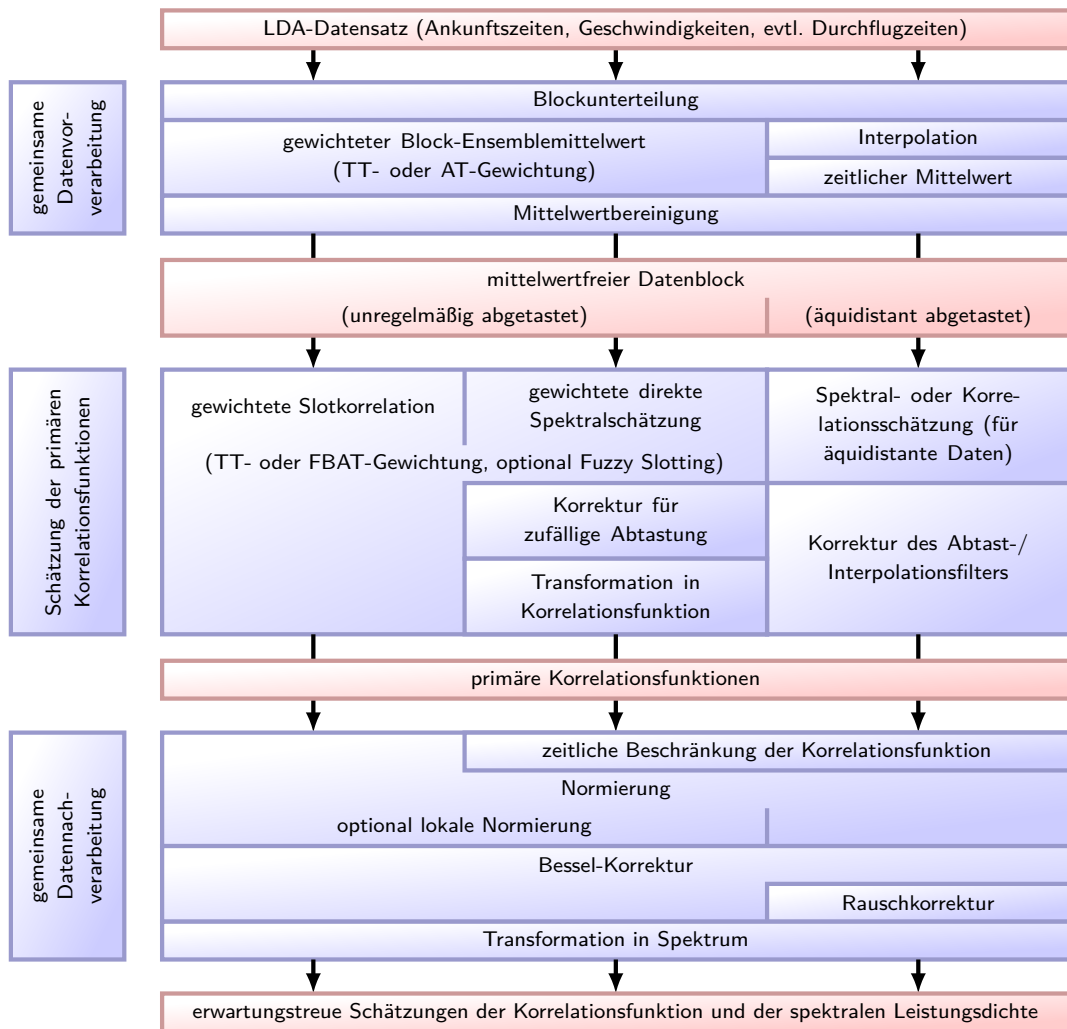


Abbildung 1: Signalfluss der LDA-Datenverarbeitung

bei typischen Datenraten von ein paar Werten pro Integralzeitmaß bereits bei Blocklängen deutlich oberhalb des Integralzeitmaßes ein systematischer Fehler durch eine zu geringe Wertezahl pro Block hinzu, wenn die Messwerte um den Blockmittelwert bereinigt werden. In [22] wurden entsprechende Korrekturen eingeführt, die der Bessel-Korrektur bei der Bestimmung der Ensemblevarianz aus einem geringen Messwertumfang bei unabhängigen Messwerten entspricht. Dort wurde gezeigt, dass durch die Kombination der zeitlichen Beschränkung der Korrelationsfunktion und dieser Korrektur der Korrelationswerte um die Schätzvarianz der Blockmittelwerte sowohl die systematischen als auch die zufälligen Fehler für eine große Bandbreite gewählter Blocklängen minimiert werden können.

Die Blöcke sollten dabei mindestens so groß gewählt werden, dass die Korrelationsfunktion des betrachteten Strömungsprozesses an den Intervallgrenzen ausreichen abgeklungen ist, also signifikant größer als das integrale Zeitmaß. Nach oben gibt es keine informationstechnische Grenze, die Blöcke können beliebig groß gewählt werden, auf die Blockmittelung kann bei Verwendung des gesamten Datensatzes auch ganz verzichtet werden. Nur rechentechnische Aspekte können die Wahl der Blocklänge beschränken. Sowohl bei der direkten Spektralschätzung als auch bei der Interpolation werden Fourier-Transformationen des Datenblocks berechnet, deren Rechenaufwand überproportional mit der Blocklänge anwachsen. Dennoch können die Blockgrößen aufgrund der Kombination der beiden Korrekturmaßnahmen, die weiter unten näher beschrieben werden, recht flexibel gewählt werden, ohne einen Informationsverlust befürchten zu müssen.

Um einen mittelwertfreien Datenblock zu erhalten, wird für jeden Block der Blockmittelwert bestimmt und von den Messwerten dieses Blockes subtrahiert. Für die direkte Spektralschätzung sowie für die Slotkorrelation bietet sich die gewichtete Ensemblemittelung an. Stehen die Durchflug- bzw. Aufenthaltszeiten (transit time, TT) der Teilchen, die zu den Messwerten gehören, zur Verfügung, dann bietet sich die Aufenthaltszeitgewichtung [7, 15] an, bei der die Durchflugzeiten der Teilchen als Gewichte verwendet werden. Diese Gewichtung funktioniert auch bei kleinen Datenraten, setzt aber die Bestimmung der Durchflugzeiten in ausreichender Qualität voraus. Als Alternative kann auch die Ankunftszeitgewichtung (arrival time, AT) [4] durchgeführt werden, bei der sich die Gewichte aus dem zeitlichen Abstand der aufeinanderfolgenden Messwerte ergeben. Die AT-Gewichtung ist robust gegenüber sehr vielfältigen Zusammenhängen zwischen der momentanen Datenrate und den Geschwindigkeitsmesswerten. Nachteilig ist jedoch, dass die Effizienz der AT-Gewichtung von der Datendichte (mittlere Messwertanzahl pro integralem Zeitmaß) abhängt [8, 9]. Bei typischen Datendichten von einigen Messwerten pro integralem Zeitmaß sind noch deutliche systematische Fehler festzustellen.

Bei der Verarbeitung von realen Messdaten wurden mitunter größere Lücken zwischen Datenwerten festgestellt, die bei der AT-Gewichtung zu unverhältnismäßig großen Gewichten führen und die Bestimmung des Ensemblemittelwertes stark verfälschen. Aus diesem Grund werden die AT-Gewichte begrenzt und bei Überschreitung der Grenze zu null gesetzt. Gute Erfahrungen konnten mit dem fünffachen mittleren Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Datenwerten als Grenzwert der AT-Gewichte gemacht werden. In diesem Fall gehen nur etwa 0.7 % der brauchbaren Werte verloren, die bei zufälliger Verteilung ebenfalls größere Abstände der aufeinanderfolgenden Messwerte ergeben können, während die großen Datenlücken effizient unterdrückt werden.

Beim Interpolationsverfahren werden neben den interpolierten und in einem regelmäßigen Raster wiederabgetasteten Geschwindigkeitswerten auch eine Serie mit Gewichten bestimmt. Diese Gewichte sind für alle interpolierten Werte eins bis auf jene, die aus einem zu lange zurückliegenden Messwert gewonnen werden. In diesem Fall werden die Gewichte auf null gesetzt. Diese Gewichte dienen ebenfalls dazu, Werte mit anschließenden langen Datenlücken zu unterdrücken. Auch hier hat sich eine obere Grenze von dem fünffachen mittleren Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Datenwerten bewährt. Die Gewichte sind auf die Werte eins und null beschränkt und können bisher nicht so flexibel wie die Gewichte der anderen Verfahren verwendet werden. Allerdings werden durch die Interpolation zwischen aufeinanderfolgenden Messwerten mehr interpolierte Werte generiert, wenn die Messwerte weiter auseinander liegen. Das entspricht einer AT-Gewichtung wie für die anderen Verfahren und erzeugt vergleichbare Ergebnisse. Eine TT-Gewichtung konnte demgegenüber für das Interpolationsverfahren bisher nicht realisiert werden.

Bei der Interpolationsmethode bietet sich im Gegensatz zu den anderen Verfahren die Bereinigung um

den Blockmittelwert nach der Interpolation und der äquidistanten Wiederabtastung an. Der Blockmittelwert wird dabei aus den interpolierten Daten gewonnen und von diesen abgezogen. Dadurch ist der weiter zu verarbeitende, interpolierte Geschwindigkeitsdatensatz tatsächlich mittelwertfrei. Für die bei der Interpolationsmethode notwendigen, weiter unten erfolgende Korrektur des Rauscheinflusses werden noch zwei weitere Serien in demselben regelmäßigen Raster erzeugt, wie für die Interpolation der Geschwindigkeitsmesswerte, nämlich die Reihe mit den Summen aller in einem Wiederabtastschritt liegenden Geschwindigkeitsmesswerte und die Reihe mit den Summen derer Quadrate. Da hierbei die um ihren Blockmittelwert bereinigten Messwerte zu verwenden sind, kann dieser Schritt erst nach der Mittelwertbereinigung erfolgen. Eine Übersicht zu diesem Verfahren ist in [24] zu finden, eine detailliert Beschreibung der einzelnen Verfahrensschritte zusammen mit dem Programm unter [1].

## 2.2 Schätzung der primären Korrelationsfunktionen

Um auch bei der Bestimmung der Korrelationsfunktion und des Leistungsdichtespektrums eine adäquate Gewichtung der gemessenen Geschwindigkeitsdaten durchzuführen, werden bei allen Verarbeitungsverfahren zwei Korrelationsfunktionen bestimmt, nämlich die der gewichteten Geschwindigkeitsmesswerte und die der Gewichte, die in einem weiteren Verarbeitungsschritt der korrekten Normierung dienen. Die Verarbeitungsverfahren unterscheiden sich lediglich in der Art der Bestimmung dieser beiden Korrelationsfunktionen und der initialen Normierung der beiden primären Korrelationsfunktionen.

Bei der Slotkorrelation werden in diesem Verarbeitungsschritt nur Summen von Kreuzprodukten bestimmt, nämlich die der gewichteten Geschwindigkeitsmesswerte und die der Gewichte. Stehen individuelle Gewichte zu den Geschwindigkeitsmesswerten zur Verfügung, z. B. die Durchflugzeiten, dann können diese Gewichte direkt verwendet werden. Die Bestimmungsformeln sind in den entsprechenden Veröffentlichungen [5, 20, 21, 22]. Stehen keine individuellen Gewichte zur Verfügung, dann kann alternativ eine Ankunftszeitgewichtung durchgeführt werden, wobei zu beachten ist, dass gegenüber der Bestimmung von Geschwindigkeitsmittelwert und -varianz eine abgewandelte Bildungsvorschrift der Gewichte einzuhalten ist, nämlich die Vorwärts-rückwärts-Ankunftszeit-Gewichtung (forward-backward arrival-time weighting, FBAT) [20, 21]. Werden die klassischen Ankunftszeitgewichte (AT) verwendet, dann kommt es zu einer gegenseitigen Abhängigkeit der Gewichte von der Zeitverschiebung der Korrelation. Durch die FBAT-Gewichtung werden die zeitlichen Größen stattdessen aus unabhängigen Intervallen zwischen aufeinanderfolgenden Messwerten gewonnen.

Werden in den entsprechenden Summen nur die Kreuzprodukte von Messwerten gezählt, dann werden weitere systematische Fehler vermieden, nämlich der Einfluss von unkorreliertem Rauschen, das in experimentellen Daten durch eine Messunsicherheit der Geschwindigkeitsmesswerte immer vorhanden ist, und die Überlagerung von unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von Selbst- und Kreuzprodukten von Messwerten. Leider ergibt sich auch ein Nachteil, da kurze Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Messwerten durch die Unterdrückung von überlagerten Streulichtsignalen und weiterer Prozessortzeiten unterrepräsentiert sind, steigt sowohl die Schätzunsicherheit der Korrelationswerte bei kleinen Zeitverschiebungen als auch die systematische Abweichung durch das bevorzugte Auftreten größerer Abtastintervalle mit bevorzugt kleinerer Korrelation der Messwerte. Eine Möglichkeit der Korrektur bietet die Bestimmung des zeitlichen Schwerpunktes [21], die in diesem Beitrag aber nicht genutzt wurde. Eine weitere Möglichkeit, die Schätzvarianz zu verringern ist durch weiche Klassenübergänge (fuzzy slotting) [25, 33] gegeben, die aber in diesem Beitrag für den direkten Vergleich der Verfahren ebenfalls nicht genutzt wurde.

Bei der direkten Spektralschätzung wird aus den Messdaten zunächst direkt ein Leistungsdichtespektrum bestimmt. Dabei können die Geschwindigkeitsmesswerte ebenfalls gewichtet werden, und zwar sowohl mit individuellen Gewichte, z. B. TT-Gewichtung [35, 6], als auch mit FBAT-Gewichtung [22]. Auch hier werden vorteilhafter Weise die Selbstprodukte von der Zählung ausgeschlossen. Das hat zu den Vorteilen, die bereits bei der Slotkorrelation beschrieben wurden, zusätzlich den Effekt, dass der systematische Fehler des Spektrums durch die zufällige Abtastung [11] korrigiert wird.

Auch bei der direkten Spektralschätzung hat sich die Normierung der Korrelationsfunktion der gewichteten Messdaten auf die Korrelationsfunktion der Gewichte [6, 22] in einem nachfolgenden Verarbeitungsschritt bewährt. Inzwischen wurde auch die Fuzzy-Slotting-Technique an die direkte Spektral-

schätzung angepasst [23], wurde aber aus Gründen der direkten Vergleichbarkeit der Verfahren hier nicht verwendet.

Beim Interpolationsverfahren werden zunächst die Spektren und daraus mittels der inversen Fourier-Transformation die Korrelationsfunktionen der interpolierten und äquidistant wiederabgetasteten Datenreihen bestimmt. Dabei wird die interpolierte Geschwindigkeitszeitreihe mit der Zeitreihe der Gewichte (nur eins bzw. null, falls eine größere Datenlücke auftritt) multipliziert und die Korrelationsfunktion dieser gewichteten Geschwindigkeitszeitreihe bestimmt und außerdem die Korrelationsfunktion der interpolierten Reihe dieser Gewichte. Beide Korrelationsfunktionen zeigen durch die vorherige Interpolation eine Tiefpassfilterung, die durch Anwendung entsprechender inverser Filter [3, 18, 26, 31] korrigiert werden können. Die Korrektur der Korrelationsfunktion nach einer Sample-and-Hold-Interpolation ist dabei besonders einfach [26]. Für die Interpolation wurden bisher weder die individuelle Gewichtung noch die Fuzzy-Slotting-Technique realisiert. Durch die häufigere Wiederabtastung von weiter auseinanderliegenden Messwerten wird aber auch bei der Bestimmung der Korrelationsfunktion eine der AT-Gewichtung ähnliche Korrektur des statistischen Fehlers erreicht.

## **2.3 Nachverarbeitung**

### **2.3.1 Zeitliche Beschränkung der Korrelationsfunktion**

Durch die zeitliche Beschränkung der Korrelationsfunktion lässt sich die Schätzvarianz des abschließend zu bestimmenden Leistungsdichtespektrums unabhängig von der Blockgröße festlegen. Deshalb können die Datenblöcke deutlich größer gewählt werden, um systematische Fehler durch zu kurze Blöcke zu vermeiden, ohne dabei auf eine effektive zeitliche Mittelung zu verzichten. Die zeitliche Beschränkung der Korrelationsfunktion ist bei der Slotkorrelation bereits durch die maximal betrachtete Zeitverschiebung zwischen den Messwerten bei der Aufsummierung der Messwertpaare gegeben, wodurch der Rechenaufwand bei der Slotkorrelation oberhalb der maximalen Zeitverschiebung linear mit der Blocklänge anwächst. Damit ist der Rechenaufwand für einen gegebenen Gesamtdatenumfang unabhängig von der Unterteilung in Blöcke, sodass die vorliegenden Daten auch in einem einzigen Block verarbeitet werden können und auf die Blockunterteilung gänzlich verzichtet werden kann.

Bei der direkten Spektralschätzung und der Interpolation müssen dagegen erst die Kennfunktionen für den gesamten Block bestimmt werden, bevor die Korrelationsfunktion gekürzt werden kann. Dieser Umstand hat zur Folge, dass der Rechenaufwand bei der direkten Spektralschätzung und der Interpolation mit  $N \log N$  mit der Anzahl  $N$  der Messwerte anwächst. Für größere Blöcke ergibt sich dadurch ein überproportional starkes Wachstum des Rechenaufwandes, sodass für diese beiden Verfahren eine Blockunterteilung durchaus sinnvoll ist.

### **2.3.2 Normierung**

Werden die aufgenommenen, zeitlich beschränkten Ausschnitte des Geschwindigkeitsverlaufs mittels der diskreten Fourier-Transformation zu Spektren und Korrelationsfunktionen verarbeitet, dann wird implizit eine periodische Fortsetzung des Signalausschnitts angenommen, wobei systematische Fehler (wrap-around error) entstehen. Diesen Fehler zu vermeiden gelingt bei äquidistanten Signalen mittels des Zero Padding, äquivalente Prozeduren gibt es auch für die direkte Spektralschätzung ungleichmäßig abgetasteter Signale [22]. Allerdings ist die Fortsetzung des Signals außerhalb des Beobachtungsintervalls auch dann nicht korrekt und die Korrelationsfunktion ist dann mit einer Dreiecks-Fensterfunktion moduliert. Eine erwartungstreue Schätzung des Spektrums erfordert eine Entfaltung des erhaltenen Spektrums mit dem Spektrum des Beobachtungsfensters bzw. eine Normierung der Korrelationsfunktion auf die Korrelationsfunktion des Beobachtungsfensters, eben die dreieckförmige Einhüllende der Korrelationsfunktion.

Bei der Slotkorrelation wird die korrekte Normierung grundsätzlich durchgeführt, und zwar auch bei der Gewichtung der LDA-Daten [5, 20, 21]. Ein positiver Nebeneffekt dieser Normierung ist eine Korrektur von Fehlereinflüssen durch eine nicht perfekt zufällige zeitliche Verteilung von Messwerten, z. B. durch die Prozessortzeiten. Diese wirken sich gleichermaßen auf die Schätzungen der Korrelationsfunktionen der Geschwindigkeitsmesswerte als auch der Gewichte aus. Durch die Normierung werden die zu niedrig bestimmten Korrelationswerte durch unterrepräsentierte kurze Abtastintervalle korrigiert.

Diese Normierung konnte auf die direkte Spektralschätzung mit ebenso guten Ergebnisse übertragen werden [6, 22]. Bei der Interpolation tritt dieses Problem weniger in Erscheinung, eine Normierung auf die Korrelationsfunktion der Gewichte bietet sich aber dennoch an, wenn reale Messdaten verarbeitet werden, bei denen größere Datenlücken auftreten können, und eine entsprechende Gewichtsfunktion definiert wird, die Abtastintervalle oberhalb einer festgelegten Maximalgröße unterdrückt [24].

Eine Weiterentwicklung der Normierung stellt die lokale Normierung dar, die eine zusätzliche Reduktion der Schätzvarianz bewirkt. Dieses Verfahren wurde für die Slotkorrelation entwickelt [32, 33, 34] und konnte inzwischen auf die direkte Spektralschätzung übertragen werden [23], wobei sehr ähnliche Effekte bezüglich der Schätzqualität festzustellen sind. Für das Interpolationsverfahren ist bisher kein äquivalentes Verfahren bekannt.

### 2.3.3 Bessel-Korrektur

Bei kurzen Blocklängen in Kombination mit niedrigen Datenraten, kann es durch eine zu geringen Anzahl von Messwerten pro Block zu einem systematischen Fehler kommen, weil Teile der Geschwindigkeitsschwankungen durch die Mittelwertkorrektur unterdrückt werden. Dieser Fehler ist bei der Bestimmung der Varianz einer Zufallsgröße aus einem endlichen Stichprobenumfang bekannt. Die Bessel-Korrektur ist eine entsprechende Korrektur für unabhängige Messwerte. Für die Korrelationsfunktion unter der Bedingung korrelierter Messwerte ist in [22] eine passende Korrektur hergeleitet. Die dafür abzuschätzende Varianz der Blockmittelwerte kann dabei sowohl aus den gemessenen Daten eines bestimmten Blocks ermittelt werden als auch alternativ aus den empirischen Mittelwerten mehrerer Blöcke. Das Verfahren konnte für alle drei Verfahren realisiert werden. Dabei gibt es jedoch für jedes Verfahren Besonderheiten zu beachten, die zu unterschiedlichen Bestimmungsgleichungen führen, da nach der Bestimmung der primären Korrelationsfunktionen für die drei Verfahren unterschiedliche Größen für die nachfolgenden Verarbeitungsschritte zur Verfügung stehen. Für die direkte Spektralschätzung und die Slotkorrelation sind die Herleitungen und die Gleichungen in [22] dargestellt, für die Interpolation in [24] bzw. in einer detaillierten Beschreibung zusammen mit dem Programm unter [1].

### 2.3.4 Rauschunterdrückung

Bei der Slotkorrelation und der direkten Spektralschätzung werden die Selbstprodukte in den Summen der Wertepaare nicht berücksichtigt bzw. nachträglich aus den Summen entfernt, um unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsdichten für das Auftreten von Selbst- und Kreuzprodukten zu verhindern bzw. um systematische Fehler durch die unregelmäßige Abtastung zu korrigieren. In beiden Fällen werden dadurch gleichzeitig systematische Fehler durch das Auftreten von Rauschen in den Amplituden der Messwerte verhindert, weil das Rauschen der verschiedenen Messwerte unkorreliert ist.

Beim Interpolationsverfahren ist dagegen nach erfolgter Interpolation keine Unterscheidung von Selbst- und Kreuzprodukten der ursprünglichen Messwerte mehr möglich. Das den Messdaten überlagerte Rauschen wirkt sich deshalb unmittelbar als systematischer Fehler auf die aus den interpolierten Daten bestimmte Korrelationsfunktion und die spektrale Leistungsdichte aus, eine nachträgliche Korrektur ist deshalb nötig. In [26] und [24] sind ein modellbasiertes und ein modellfreies Verfahren mit diesem Ziel dargestellt.

### 2.3.5 Transformation

Nach erfolgten Korrekturen der Korrelationsfunktion kann diese abschließend mit der diskreten Fourier-Transformation in eine spektrale Leistungsdichte überführt werden. Durch die zeitliche Beschränkung der Korrelationsfunktion lässt sich die Schätzvarianz des Spektrums bei allen drei Verfahren unabhängig von der Blocklänge festlegen.

## 3 Vergleich der Verfahren

Zum Nachweis der Funktionstüchtigkeit der Verfahren und zum Vergleich dieser wurden sowohl Simulationsrechnungen durchgeführt als auch experimentelle Daten ausgewertet.

Bei der Simulation wurde ein autoregressiver stochastischer Prozess generiert, der ein  $-5/3$ -Spektrum realisiert. Die zunächst dicht und äquidistant abgetastete Zeitreihe wird in einem zweiten Schritt zufällig abgetastet, wobei sowohl der Transport der Streuteilchen und somit die Korrelation von Messrate und

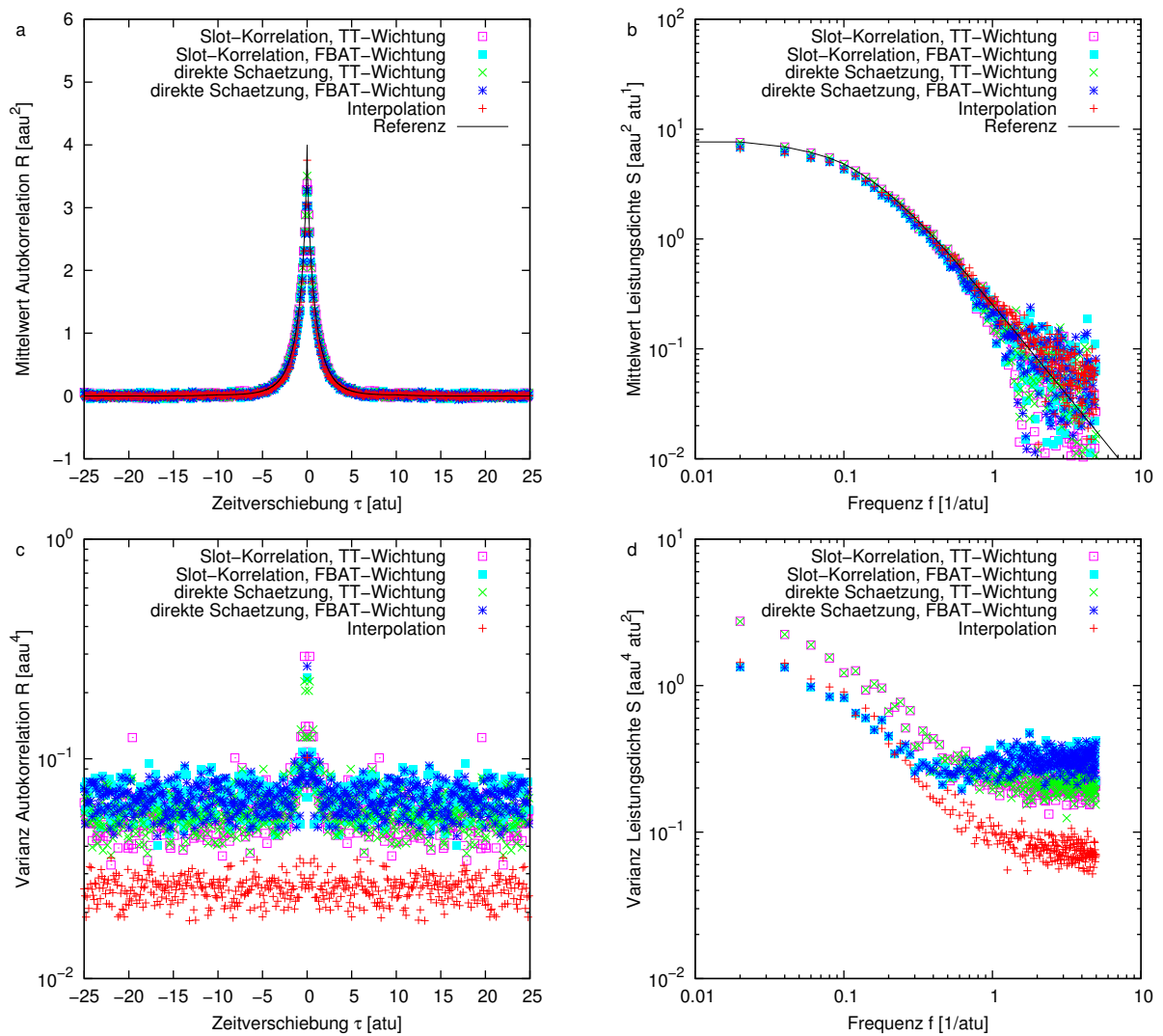


Abbildung 2: Vergleich der Verfahren zur Korrelations- und Spektralschätzung mit simulierten Datensätzen: a) gemittelte Korrelationsfunktion, b) gemittelt, einseitiges Spektrum, c) und d) die entsprechenden empirischen Schätzvarianzen



Messwert und der damit verbundene statistische Fehler simuliert werden als auch die unterrepräsentierten kurzen Abtastintervalle aufgrund von Prozessortotzeiten. Die simulierten Geschwindigkeitsdaten wurden dann mit den zuvor vorgestellten Verfahren analysiert. In Abb. 2 sind die Ergebnisse zusammengefasst. Anhand der Mittelwerte der Korrelationsfunktion und des einseitigen Spektrums (Abb. 2a und b) wird deutlich, dass alle Verfahren grundsätzlich in der Lage sind, die statistischen Kennfunktionen zu bestimmen. Die Unterschiede zwischen den Verfahren sind gering und lassen kein Verfahren erkennen, welches gegenüber den anderen zu bevorzugen oder auszuschließen wäre. Die systematischen Fehler werden in allen Fällen wirksam unterdrückt, wobei die zu geringe Abschätzung der Korrelation durch die Slotkorrelation und die direkte Spektralschätzung bei der Zeitverschiebung von null durch die abnehmende Zahl der Kreuzprodukte bei kleinen Zeitverschiebungen sichtbar ist. Weiterhin muss bemerkt werden, dass die FBAT-Gewichtung und auch die Interpolation mit abnehmender Datendichte ineffizient bei der Korrektur des statistischen Fehlers aufgrund der Korrelation von Messrate und Messwert werden, während die TT-Gewichtung unabhängig von der Datendichte ist.

Die Varianzen der statistischen Funktionen (Abb. 2c und d) zeigen nur geringe Unterschiede zwischen der Slotkorrelation und der direkten Spektralschätzung, was ein Indiz dafür ist, dass beide Verfahren die im Datensatz vorhandene Information ähnlich effizient nutzen. Der geringe Unterschied zwischen der FBAT- und der TT-Gewichtung ist nicht aussagekräftig, da die Schätzvarianz zwischen diesen Verfahren unterschiedlich von der Datendichte abhängt. Auffällig ist hingegen die signifikant geringere Schätzvarianz des Interpolationsverfahrens, eine Tendenz, die auch bei der Berechnung der Kreuzkorrelation zwischen verschiedenen Messreihen aus Zweipunktmessungen gegenüber der Slotkorrelation gefunden wurde [19]. Die folgenden Ergebnisse für die experimentellen Daten schränken diese Erkenntnis allerdings auf die FBAT-Gewichtung ein, während abhängig von der Datendichte, die TT-Gewichtung eine andere Schätzvarianz aufweist.

Zum experimentellen Nachweis wurden Messungen in einem geschlossenen Windkanal mit einem quadratischen Querschnitt von  $300\text{ mm} \times 300\text{ mm}$ , in einer turbulenten Strömung hinter einem Gitter durchgeführt. Die freie Anströmgeschwindigkeit betrug  $30\text{ m/s}$ . Das Gitter war aus Draht mit dem Durchmesser  $1.5\text{ mm}$  und hatte einen freien Abstand zwischen den Maschen von  $6.5\text{ mm}$ . Die Reynoldszahl betrug ca.  $12\,000$ . Die Testdaten wurde mit einem Laser-Doppler-Anemometer  $133\text{ mm}$  hinter dem Gitter aufgenommen, entsprechende Referenzdaten mit einem Hitzdrahtanemometer an derselben Position in der Strömung. Für die LDA-Messungen wurden der Luft Streuteilchen von etwa  $2\text{ }\mu\text{m}$  Größe hinzugefügt, Das LDA war ein zweikomponentiges FiberFlow-System von Dantec auf einer zweiachsigen Traverse, mit zwei BSA-enhanced Prozessoren und der BSA-Flow-Software. Für diese Messungen wurde ein Argon-Ionen-Laser Coherent Innova 90 eingesetzt, der mit  $2\text{ W}$  über alle Spektrallinien betrieben wurde, wobei nur die grüne Spektrallinie für die Messung der Geschwindigkeit in Längsrichtung des Windkanals mit einer Rückstreusonde verwendet wurde. Das Hitzdrahtanemometer war ein Dantec StreamLine mit einer Eindrahtsonde 55P11 und der entsprechenden analogen Signalverarbeitung bestehend aus der Signalaufbereitung mit einstellbarer Verstärkung, Offset- und Tiefpassfilter und AD-Konverter. Die Steuerung und die Signalverarbeitung zu der Geschwindigkeitswerten erfolgte durch die StreamWare-Software von Dantec. Eine Beschreibung des Experiments ist in [14] zu finden. Die Daten sind frei zugänglich unter [2].

Die zehn Datensätze wurden in Blöcke von jeweils  $0.5\text{ s}$  Dauer unterteilt. Insgesamt entstanden  $444$  Blöcke. Die Testdaten in Abb. 3 bestätigen die zuvor erhaltenen Ergebnisse. Die verschiedenen Verfahren zeigen keine signifikanten Abweichungen der aus den LDA-Daten geschätzten Korrelationsfunktionen und Spektren gegenüber den Referenzdaten der Hitzdrahtmessung. Die sehr ähnliche Schätzqualität der Slotkorrelation und der direkten Spektralschätzung zeigt sich auch hier sowohl in den gemittelten Kennfunktionen als auch in deren Schätzvarianz. Im Gegensatz zu der Simulation oben ist hier der Unterschied zwischen den verschiedenen Gewichtungsvorschriften größer, während hier die Schätzvarianz des Interpolationsverfahrens näher an denen der FBAT-Gewichtung der anderen Verfahren liegt.

#### **4 Zusammenfassung und Ausblick**

Die drei grundlegenden Verfahren zur Bestimmung der Korrelationsfunktion und des Leistungsdichtespektrums aus ungleichmäßig abgetasteten Datensätzen wurden bisher separat analysiert und wei-

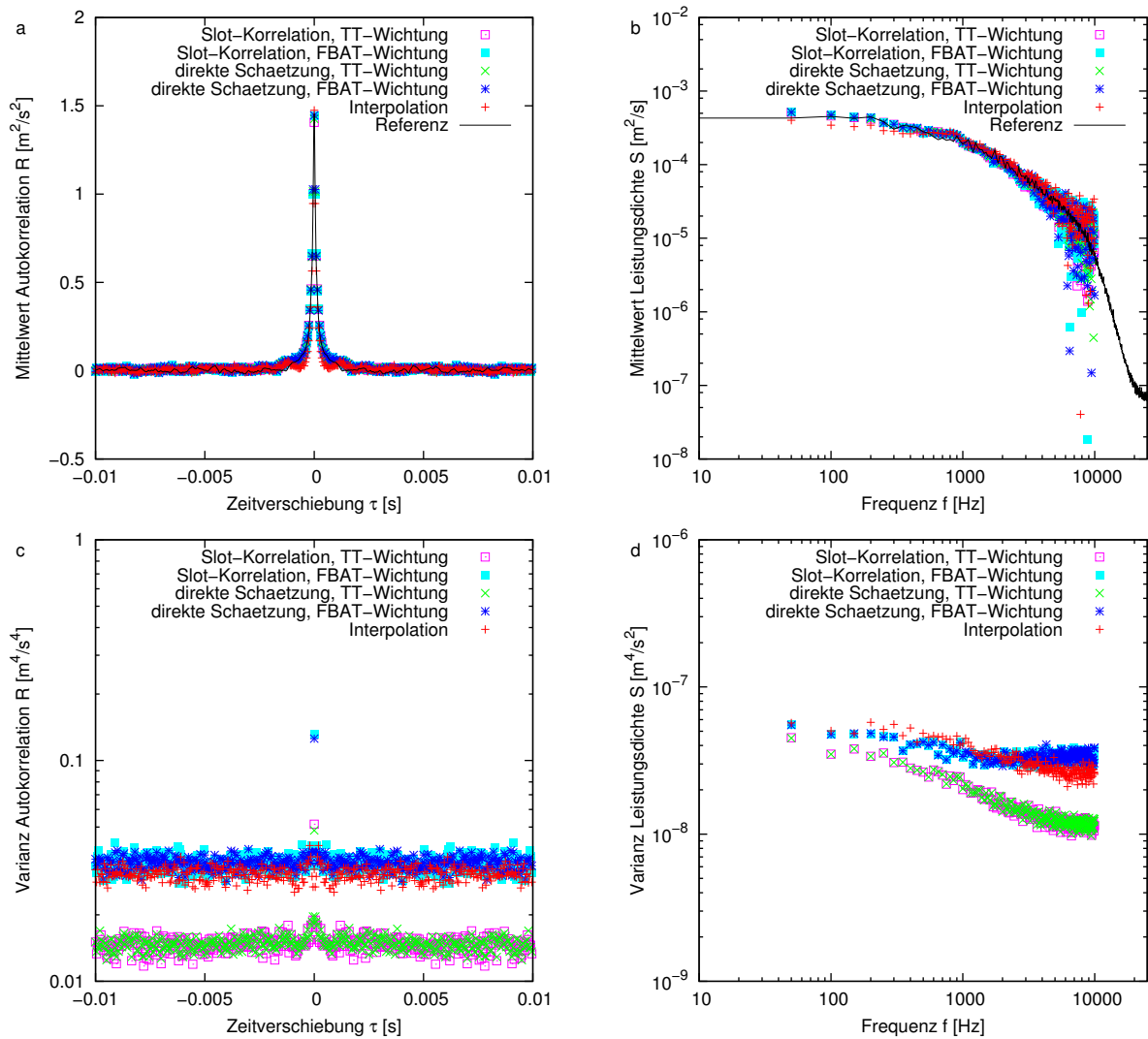


Abbildung 3: Vergleich der Verfahren zur Korrelations- und Spektralschätzung mit experimentellen Datensätzen: a) gemittelte Korrelationsfunktion, b) gemittelt, einseitiges Spektrum, c) und d) die entsprechenden empirischen Schätzvarianzen

terentwickelt. Die Analysen haben individuelle Abhängigkeiten und systematische Fehler aufgedeckt. Als Resultat wurden Vergleiche der Verfahren stets zur Qualifikation eines bestimmten Verfahrens gegenüber den anderen unter gegebenen Randbedingungen durchgeführt. Die Weiterentwicklungen der vergangenen Jahre haben die Schätzqualität aller drei Verfahren verbessert, insbesondere wurden die systematischen Fehler dabei korrigiert. Außerdem konnten Details der Signalverarbeitung, die ursprünglich für ein bestimmtes Verfahren entwickelt wurden, auf die anderen Verfahren übertragen werden, die in sehr ähnlicher Weise von den eingesetzten Techniken profitierten. Dabei haben sich die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren immer weiter angenähert, sodass inzwischen keine eindeutigen Aussagen über die Bevorzugung eines bestimmten Verfahrens unter gegebenen Randbedingungen gemacht werden können. Im Gegenteil hat sich herausgestellt, dass die Verfahren sehr ähnliche Abhängigkeiten von den Randbedingungen haben, woraus sich schließen lässt, dass die Verfahren die zur Verfügung stehende Information ähnlich effizient nutzen.

Dieser Prozess der Konvergenz der Verfahren zur Bestimmung von Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektren aus unregelmäßig abgetasteten LDA-Datensätzen ist nicht abgeschlossen. Es gibt weitere Detailverbesserungen einzelner Verfahren, die noch auf die anderen Verfahren übertragen werden können. Darüber hinaus wären Verarbeitungsschritte wünschenswert, die ohne Anpassungen an ein bestimmtes Verfahren auskommen. Voraussetzung dafür wäre, dass nach einem Verarbeitungsschritt unabhängig vom eingesetzten Verfahren äquivalente Größen und Funktionen vorliegen, was bisher aber noch nicht vollständig erreicht wurde.

### Zusatzmaterial

Unter [1] sind die Python-Programme, die in diesem Beitrag verwendet wurden, weitere Programme aus anderen Veröffentlichungen sowie neuere Entwicklungen.

### Danksagung

Der Autor bedankt sich herzlich bei Palle Gjelstrup, Finn E. Jørgensen (Dantec Dynamics) und Knud Erik Meyer (Danmarks Tekniske Universitet) für die Durchführung der Experimente und die Bereitstellung und Veröffentlichung der Messdaten.

### Literatur

- [1] URL <http://ldvproc.nambis.de/programs/pyLDV.html>.
- [2] URL <http://ldvproc.nambis.de/data/dtudata.html>.
- [3] R J Adrian and C S Yao. Power spectra of fluid velocities measured by laser Doppler velocimetry. *Exp. in Fluids*, 5:17–28, 1987.
- [4] D Barnett and H Bentley. Statistical biasing of individual realization laser velocimeters. In *Proc. 2nd Int. Workshop on Laser Velocimetry*, pages 428–444, Purdue University, 1974.
- [5] P Buchhave, W K George, Jr, and J L Lumley. The measurement of turbulence with the laser Doppler anemometer. In *Annual Review of Fluid Mechanics*, volume 11, pages 442–503. Annual Reviews, Inc., Palo Alto, CA, 1979.
- [6] P Buchhave and C M Velte. Reduction of noise and bias in randomly sampled power spectra. *Experiments in Fluids*, 56:79, 2015.
- [7] P Buchhave, H-H von Benzon, and C N Rasmussen. LDA bias: Comparison of measurement errors from simulated and measured data. In *Proc. 5th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 1990. paper 29.3.
- [8] W Fuchs, H Albrecht, H Nobach, C Tropea, and L J W Graham. Simulation and experimental verification of statistical bias in laser Doppler anemometry including non-homogeneous particle density. In *Proc. 6th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 1992. paper 8.2.
- [9] W Fuchs, H Nobach, and C Tropea. Laser Doppler anemometry data simulation: Application to investigate the accuracy of statistical estimators. *AIAA Journal*, 32:1883–1889, 1994.
- [10] M Gaster and J B Roberts. Spectral analysis of randomly sampled signals. *J. Inst. Maths. Applics.*, 15:195–216, 1975.

- [11] M Gaster and J B Roberts. The spectral analysis of randomly sampled records by a direct transform. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 354:27–58, 1977.
- [12] W K George. Quantitative measurement with the burst-mode laser Doppler anemometer. *Exp. Therm. and Fluid Sci.*, 1:29–40, 1988.
- [13] W K George, P D Beuther, and J L Lumley. Processing of random signals. pages 757–800, 1978. Proceedings of the dynamic flow conference, Skovlunde, Denmark, (PO Box 121, DK-2740 Skovlunde).
- [14] P Gjelstrup, H Nobach, F Jørgensen, and K E Meyer. Experimental verification of novel spectral analysis algorithms for laser Doppler anemometry data. In *Proc. 10th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 2000. paper 3.2.
- [15] W Hösel and W Rodi. New biasing elimination method for laser-Doppler-velocimeter counter processing. *Rev. Sci. Instrum.*, 48:910–919, 1977.
- [16] W T Mayo, Jr. A discussion of the limitations and extensions of power spectrum estimation with burst counter LDV systems. pages 90–104, 1974. Proceedings of the second international workshop on laser velocimetry, (Bull. No. 144), Purdue Univ., West Lafayette, Ind.
- [17] W T Mayo, Jr, M T Shay, and S Ritter. The development of new digital data processing techniques for turbulence measurements with a laser velocimeter, 1974.
- [18] S Moreau, G Plantier, J-C Valière, H Bailliet, and L Simon. Estimation of power spectral density from laser Doppler data via linear interpolation and deconvolution. *Experiments in Fluids*, 50:179–188, 2011.
- [19] E Müller, H Nobach, and C Tropea. A refined reconstruction-based correlation estimator for two-channel, non-coincident laser Doppler anemometry. *Meas. Sci. and Technology*, 9(3):442–451, 1998.
- [20] H Nobach. Processing of stochastic sampled data in laser Doppler anemometry. In *Proc. 3rd International Workshop on Sampling Theory and Applications*, Loen, Norway, pages 149–154, 1999.
- [21] H Nobach. Local time estimation for the slotted correlation function of randomly sampled LDA data. *Exp. in Fluids*, 32:337–345, 2002.
- [22] H Nobach. Corrections to the direct spectral estimation for laser Doppler data. *Exp. in Fluids*, 56:109, 2015.
- [23] H Nobach. Local normalization and fuzzy slotting for the direct spectral estimation from laser Doppler data. *submitted to Exp. in Fluids*.
- [24] H Nobach. A model-free noise removal for the interpolation method of correlation and spectral estimation from laser Doppler data. *Exp. in Fluids*, 56:100, 2015.
- [25] H Nobach, E Müller, and C Tropea. Correlation estimator for two-channel, non-coincidence laser-Doppler-anemometer. In *Proc. 9th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 1998. paper 32.1.
- [26] H Nobach, E Müller, and C Tropea. Efficient estimation of power spectral density from laser Doppler anemometer data. *Experiments in Fluids*, 24:499–509, 1998.
- [27] J B Roberts and D B S Ajmani. Spectral analysis of randomly sampled signals using a correlation-based slotting technique. *IEE Proc.*, 133(2):153–162, 1986.
- [28] P F Scott. Random sampling theory and its application to laser velocimeter turbulent spectral measurements. Technical report, General Electric Co., Corporate Res. and Development, 1974. Report No. 74CRD216, Tech, Info Series.
- [29] P F Scott. *Distortion and Estimation of the Autocorrelation Function and Spectrum of a Randomly Sampled Signal*. PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY, 1976.
- [30] M T Shay. *Digital Estimation of Autocovariance Functions and Power Spectra from Randomly Sampled Data Using a Lag Product Technique*. PhD thesis, Texas A&M University, College Station, TX, 1976.
- [31] L Simon and J Fitzpatrick. An improved sample-and-hold reconstruction procedure for estimation

- of power spectra from LDA data. *Exp. in Fluids*, 37:272–280, 2004.
- [32] M J Tummers, D M Passchier, and P A Aswatha Narayana. LDA measurements of time- and spatial correlation functions in an adverse pressure gradient wake. In *Proc. ASME/JSME Fluids Eng. and Laser Anemometry Conf.*, pages 347–355, Hilton Head Island, South Carolina, USA, 1995. FED-Vol. 229.
- [33] H R E van Maanen, H Nobach, and L H Benedict. Improved estimator for the slotted autocorrelation function of randomly sampled LDA data. *Meas. Sci. Technol.*, 10(1):L4–L7, 1999.
- [34] H R E van Maanen and M J Tummers. Estimation of the autocorrelation function of turbulent velocity fluctuations using the slotting technique with local normalization. In *Proc. 8th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 1996. paper 36.4.
- [35] C M Velte, W K George, and P Buchhave. Estimation of burst-mode LDA power spectra. *Exp. in Fluids*, 55:1674, 2014.