Fachtagung "Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik"
9. – 11. September 2014, Karlsruhe

Schätzung der Partikelposition mittels spektraler Analyse aus reduzierten Datenmengen

Robert Kostbade*, André Angierski+, Martin Schaeper*, Volker Kühn+, Nils Damaschke*
Universität Rostock, * Institut für Allgemeine Elektrotechnik, Albert-Einstein.-Str. 2, 18057 Rostock,
+ Institut für Nachrichtentechnik, Richard-Wagner-Str. 31, 18119 Rostock (Warnemünde)

Partikelpositon, spektrale Analyse, PIV
Particle position, spectral analysis, PIV

Zusammenfassung
Aktuelle Particle Tracking Velocimetry (PTV)-Systeme sind aufgrund von hohen Datenraten in der möglichen Aufnahmezeit beschränkt. Bilder werden mit hoher Bildwiederholrate aufgenommen und unkomprimiert gespeichert, um später die Positionen und Bewegungen der Partikel schätzen zu können. Sind jedoch nur wenige Partikel im Bild, so ist der Informationsgehalt gering.
Die vorliegende Arbeit beschreibt einen parametrischen Ansatz für das Problem der Partikellokalisierung. Dabei kann jedes Partikel durch zwei Koordinaten und eine Amplitude exakt beschrieben werden. Ziel ist es, nur so viele Pixel abzuspeichern, wie notwendig sind, um die Parameter zu schätzen. Dadurch kann bei geringen Partikeldichten die Aufnahmezeit erheblich verlängert werden.
Der in der Signalverarbeitung bekannte Ansatz für Finite Rate of Innovation (FRI) Signale, also jene mit endlicher Parameteranzahl, wird umfassend dargelegt. Die Machbarkeit des vorgeschlagenen Ansatzes wird mit Simulationsergebnissen belegt.

1 Einführung

Für aktuelle PIV und PTV-Systeme werden hochaufgelöste Bilder mit hohen Bildwiederholraten aufgenommen. Dieses Vorgehen führt zu großen Datenmengen und somit kurzen Aufnahmezeiten. Haben die aufgenommenen Bilder jedoch nur eine geringe Partikeldichte, wie bei PTV, so ist ihr Informationsgehalt gering. Herkömmliche Komprimierungsverfahren liefern hier keine brauchbaren Ergebnisse, da diese zu Artefakten führen, welche die Bewegungsschätzung und Lokalisierung der Partikel stören und daher in kommerziellen Systemen vermieden werden. Möglich wäre nur die Pixel abzuspeichern, die über einer Schwellintensität liegen. Allerdings müssen auch hierfür alle Pixel des Bildes ausgelesen und bewertet werden. Das vorliegende Verfahren zeigt einen Komprimierungsansatz, spezifisch für PIV und PTV-Aufnahmen, der die Partikelpositionen aus einer reduzierten Anzahl zufällig ausgewählter Pixel des Gesamtbildes schätzt.
In der Signalverarbeitung wurden Ansätze für Finte Rate of Innovation (FRI) Signale entwickelt z. B. [1], [2], [3], [4], [5]. Diese befassen sich mit Signalen, die einen geringen Informationsgehalt haben. Es wird ausgenutzt, dass die Signale einem parametrischen Modell zugrunde liegen, wobei die Anzahl der notwendigen Parameter zur Beschreibung des Signals klein ist. Prinzipiell genügt es, so viele Information/Abtastwerte zu akquirieren, wie notwendig, um alle Parameter des Signals schätzen zu können. In den referenzierten Arbeiten werden Methoden beschrieben, wie der Abtastprozess für solche Signale gestaltet

werden kann. Dazu wird das FRI-Signal in einen Unterraum projiziert, der sich durch die gleichen Parameter beschreiben lässt, aber eine niederratige Abtastung erlaubt. Während bei PIV/PTV-Anwendungen die Informationen zu einem Partikel nur in dessen direkter Umgebung auf dem Bild zu finden sind, ist es hier das Ziel, diese Information auf das ganze Bild durch Projektion zu verteilen. Damit können die Parameter unabhängig von den Abtastpositionen geschätzt werden. Weitere Publikationen befassen sich mit unterschiedlichen Signalmodellen und Projektionen [6], [7] oder einer umfassenden theoretischen Beschreibung des vorliegenden Problems [8].

2 Systembeschreibung

2.1 Problemstellung

Für das vorliegende Problem wird eine Bildintensität

$$s(x,y) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k \, h(x - x_k, y - y_k) \tag{1}$$

angenommen, resultierend aus dem gestreuten Licht von K Partikeln. Das gestreute Licht einer Punktquelle wird durch die Abbildungsoptik mittels einer Punktverwaschungsfunktion $h(x,y)$ abgebildet. Wird von idealen Partikeln ausgegangen, so können diese als punktförmige Quellen für das gestreute Licht angenommen werden $h(x,y) = \delta(x,y)$. Weiterhin ist für jedes Partikel die Amplitude des gestreuten Lichts mit c_k definiert. Die Position des k-ten Partikels ist mit den Koordinaten (x_k, y_k) gegeben. Dabei wird angenommen, dass sich die Partikelpositionen auf eine Ebene der Größe $\tau_\mathrm{x} \times \tau_\mathrm{y}$ beschränken: $x_k \in (0, \tau_\mathrm{x}]$ und $y_k \in (0, \tau_\mathrm{y}]$.

In der Signalverarbeitung werden solche Modelle als Signale mit Finite Rate of Innovation (FRI) bezeichnet [1], [2], [3], [4], [5], d. h., sie sind durch einen endlichen Satz an Parametern pro Intervall beschreibbar. Für das modellierte Bild sind diese Parameter die Amplituden sowie die Koordinaten in zwei Dimensionen für jedes Partikel ($3K$ Paramater).

Für die spätere Schätzung der Partikelpositionen wird die Fourier-Transformierte der Bildintensität bestimmt.

$$S(f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y}) = H(f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y}) \sum_{k=0}^{K-1} c_k \, e^{-j2\pi(f_\mathrm{x} x_k + f_\mathrm{y} y_k)} \tag{2}$$

Dabei ist $H(f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y})$ abhängig von der Partikel- bzw. Impulsform. Für Dirac-Impulse ist $H(f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y})$ frequenzunabhängig, d. h. über den gesamten Spektralbereich konstant.

2.2 Tiefpass-Filterung

Der ausschlaggebende Teil des vorgeschlagenen Verfahrens betrifft die Detektion oder auch Abtastung des kontinuierlichen Bildes. Erstens soll die Datenrate so weit wie möglich reduziert werden, um eine länge Beobachtungszeit für PIV/PTV-Anwendungen zu ermöglichen. Zweitens werden zur Schätzung der K Positionen $\{x_k, y_k\}_{k=0}^{K-1}$ mindestens $2K \times 2K$ Koeffizienten aus der spektralen Beschreibung $S(f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y})$ benötigt. Wird die Abtastrate kleiner gewählt, führt dies zu einem unterbestimmten Gleichungssystem und eine zuverlässige Schätzung der Positionen wird unmöglich.

Um die spektrale Beschreibung für die Schätzung zu erhalten, muss zunächst die Intensitätsverteilung abgetastet werden. Das Abtasttheorem [9], [10] garantiert die fehlerfreie Rekonstruktion der Intensitätsverteilung, erfordert jedoch, dass die höchste auftretende Ortsfrequenz kleiner ist als die halbe Abtastrate. Daher wird vor der Abtastung eine

Transformation der Intensitätsverteilung mittels Tiefpassfilterung mit dem Sum of Sincs (SoS) [6], [7], [11], [12], [13] Filterkern

$$G(f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y}) = \left[\sum_{l_\mathrm{x} \in \mathbb{L}_\mathrm{x}} \alpha_{l_\mathrm{x}} \operatorname{sinc}(f_\mathrm{x} \cdot \tau_\mathrm{x} - l_\mathrm{x})\right]\left[\sum_{l_\mathrm{y} \in \mathbb{L}_\mathrm{y}} \beta_{l_\mathrm{y}} \operatorname{sinc}(f_\mathrm{y} \cdot \tau_y - l_\mathrm{y})\right] \tag{3}$$

durchgeführt, um die Bandbreite zu reduzieren. Der Filterkern besteht aus einer Superposition von $|\mathbb{L}_\mathrm{x}| \times |\mathbb{L}_\mathrm{y}|$ sinc-Funktionen. Die Funktionen sind derart gegeneinander verschoben, dass ihre Nullstellen übereinander liegen und die Koeffizienten

$$G(f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y}) = \begin{cases} \alpha_{l_\mathrm{x}} \cdot \beta_{l_\mathrm{y}} & (f_\mathrm{x} \cdot \tau_\mathrm{x} \in \mathbb{L}_\mathrm{x}) \wedge (f_y \cdot \tau_\mathrm{y} \in \mathbb{L}_\mathrm{y}) \\ 0 & (f_\mathrm{x} \cdot \tau_\mathrm{x} \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{L}) \vee (f_y \cdot \tau_\mathrm{y} \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{L}_\mathrm{y}) \\ \text{beliebig} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4}$$

sich nicht gegenseitig stören. Die Mengen $\mathbb{L}_\mathrm{x}$ und $\mathbb{L}_\mathrm{y}$ bestehen aus ganzen Zahlen und bestimmen die genauen Positionen der verschobenen sinc-Funktionen. Die Koeffizienten α_{l_x} und β_{l_y} dienen zur Gewichtung der sinc-Funktionen und sollen ungleich Null sein.

$$\alpha_{l_\mathrm{x}} \neq 0 \; \forall \, l_\mathrm{x} \in \mathbb{L}_\mathrm{x} \qquad\qquad \beta_{l_\mathrm{y}} \neq 0 \; \forall \, l_\mathrm{y} \in \mathbb{L}_\mathrm{y} \tag{5}$$

Um ein reellwertiges Tiefpassfilter $g(x, y)$ im Ortsbereich zu erhalten, muss die spektrale Beschreibung konjugiert symmetrisch sein. Die normierte Bandbreite des Filterkerns kann mit $|\mathbb{L}_\mathrm{x}|/2$ bzw. $|\mathbb{L}_\mathrm{y}|/2$ angegeben werden. Da, wie zuvor erwähnt, für die Schätzung der Positionen $\{x_k, y_k\}_{k=0}^{K-1}$ mindestens $2K \times 2K$ Koeffizienten erforderlich sind, ergeben sich

$$|\mathbb{L}_\mathrm{x}| \geq 2K + 1 \qquad \text{und} \qquad |\mathbb{L}_\mathrm{y}| \geq 2K + 1 \tag{6}$$

als untere Grenzen für die erforderliche doppelte Bandbreite.
Die Abbildungen illustrieren den SoS-Filter für eine Dimension, $G(f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y} = 0)$ für $|\mathbb{L}_\mathrm{x}| = 11$ mit rechteckförmiger (links) und dreieckförmiger (rechts) Koeffizientenverteilung α_{l_x}. Dargestellt sind die einzelnen sinc-Funktionen (dünn, unterschiedlich farbig) gewichtet mit den Koeffizienten α_{l_x} (Kreuze, blau), sowie die resultierende Gesamtfunktion (fett, blau) in Abb. 1.

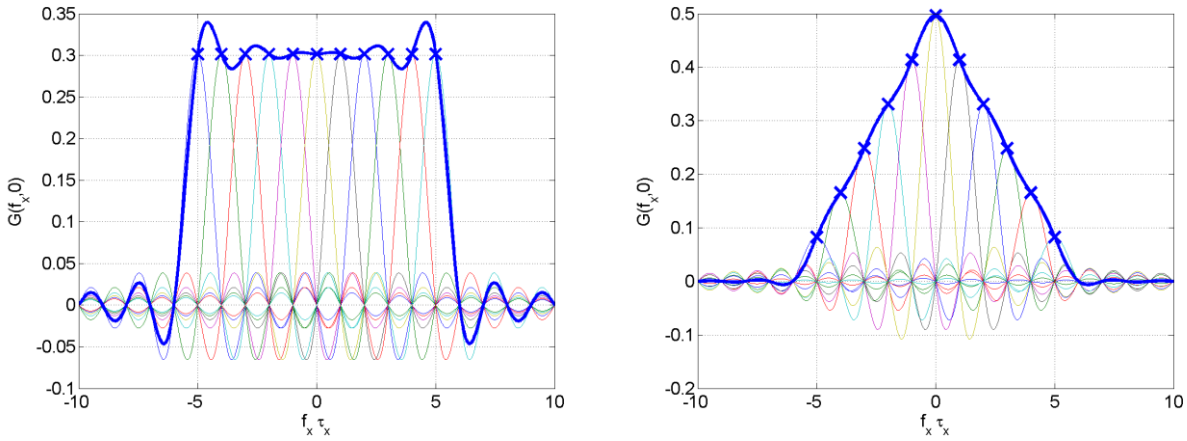

Abb. 1: SoS-Tiefpassfilter $G(f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y})$ (blau, fett) für x-Dimension mit $\mathbb{L}_\mathrm{x} = \{-5, \ldots, +5\}$, Koeffizienten α_{l_x} (blau, Kreuze) mit Rechteckverteilung (links) und Dreiecksverteilung (rechts); zusätzlich dargestellt sind die einzelnen, gewichteten sinc-Funktionen (unterschiedliche farbig, dünn)

Neben der spektralen Beschreibung kann die Beschreibung der Filterfunktion im Ortsbereich angegeben werden,

$$g(x,y) = \left[\mathrm{rect}\left(\frac{x}{\tau_\mathrm{x}}\right) \sum_{l_\mathrm{x} \in \mathbb{L}_\mathrm{x}} \alpha_{l_\mathrm{x}}\, e^{j2\pi l_\mathrm{x} \frac{x}{\tau_\mathrm{x}}}\right] \left[\mathrm{rect}\left(\frac{y}{\tau_\mathrm{y}}\right) \sum_{l_\mathrm{y} \in \mathbb{L}_\mathrm{y}} \beta_{l_\mathrm{y}}\, e^{j2\pi l_\mathrm{y} \frac{y}{\tau_\mathrm{y}}}\right] \tag{7}$$

deren Ausdehnung sich aufgrund der Rechteck-Funktion exakt auf das Beobachtungsintervall $\tau_\mathrm{x} \times \tau_\mathrm{y}$ beschränkt. Unter der Annahme eines reellwertigen Tiefpassfilters lassen sich die komplexwertigen Exponentialfunktionen zu reellwertigen Kosinus-Termen zusammenfassen. Abb. 2 illustriert die eindimensionale Filterfunktion $g(x, y = 0)$ für die rechteckförmige (links) und eine dreieckförmige (rechts) Koeffizientenverteilung α_{l_x}. Deutlich erkennbar ist in beiden Fällen die endliche Ausdehnung des Filterkerns, beschränkt auf das Beobachtungsintervall der Größe τ_x (in der x-Dimension).

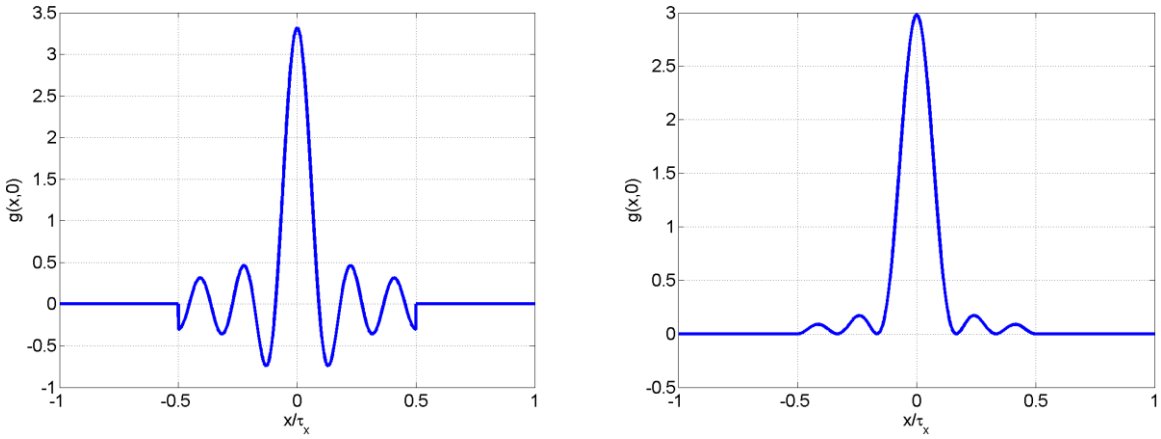

Abb. 2: SoS-Tiefpassfilter $g(x,y)$ für x-Dimension mit $\mathbb{L}_\mathrm{x} = \{-5, \dots, +5\}$, Koeffizienten α_{l_x} mit Rechteckverteilung (links) und Dreiecksverteilung (rechts)

Für die dargestellten Filterfunktionen im Spektral- und Ortsbereich (Abb. 1 bzw. Abb. 2) wurden jeweils die gleichen Koeffizienten α_{l_x} genutzt. Diese wurden derart gewählt, dass sich ein energienormiertes Filter ergibt.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x, y = 0)|^2\, dx = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{l_\mathrm{x} \in \mathbb{L}_\mathrm{x}} \left|\alpha_{l_\mathrm{x}}\right|^2 = 1 \tag{8}$$

Die Anwendung des Filterkerns im Spektralbereich führt zu einer Multiplikation der Spektralfunktionen

$$R(f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y}) = S(f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y}) \cdot G(f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y}) \tag{9}$$

bzw. einer linearen Faltung der Funktionen im Ortsbereich

$$r(x,y) = s(x,y) * g(x,y)\,. \tag{10}$$

Ein Kamerasensor soll für das hier gezeigte Vorgehen diese tiefpassgefilterte Abbildung generieren. Die Tiefpassfilterung kann dabei nachträglich durch digitale Filter oder eventuell auch optisch im Strahlengang realisiert werden. Die optische Generierung hätte direkt den Vorteil der Reduktion der auszulesenden Pixel. Für die nachträgliche digitale Filterung müsste auch weiterhin der gesamte Sensorchip ausgelesen aber nur eine reduzierte Anzahl von Pixeldaten übertragen werden.

Dabei muss laut Abtasttheorem gelten, dass die minimalen Abtastraten $1/M$ in x-Dimension und $1/N$ in y-Dimension größer als die jeweils doppelten Bandbreiten sind. Damit lässt sich (6) zu

$$M \geq |\mathbb{L}_\mathrm{x}| \geq 2K+1 \qquad \text{und} \qquad N \geq |\mathbb{L}_\mathrm{y}| \geq 2K+1 \tag{11}$$

erweitern. D. h., in jeder Dimension muss die Anzahl der Abtastwerte (mehr als) doppelt so groß wie die Anzahl der Partikel sein.

2.3 Positionsschätzung

Für den vorliegenden Ansatz wird für praktische Systeme davon ausgegangen, dass diskrete Intensitätswerte zunächst abgespeichert werden. Die Schätzung der Partikelpositionen $\{x_k, y_k\}_{k=0}^{K-1}$ erfolgt dann in einem nachgelagerten Offline-Prozess aus den Intensitätswerten. Aus der zweidimensionalen, abgetasteten Bildintensität kann mittels zweidimensionaler, diskreter Fourier-Transformation (DFT) die spektrale Beschreibung

$$R[l_\mathrm{x}, l_\mathrm{y}] = R\left(f_\mathrm{x} = \frac{l_\mathrm{x}}{\tau_\mathrm{x}}, f_\mathrm{y} = \frac{l_\mathrm{y}}{\tau_\mathrm{y}}\right) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} r[m,n] \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ml_\mathrm{x}}{M}+\frac{nl_\mathrm{y}}{N}\right)} \tag{12}$$

bestimmt werden. Dabei können bei Einhaltung des Abtasttheorems $|\mathbb{L}_\mathrm{x}| \times |\mathbb{L}_\mathrm{y}|$ Spektralkoeffizienten ungleich Null bestimmt werden. Um aus den Spektralkoeffizienten die spektrale Beschreibung des FRI-Signals (2) zu erhalten, muss die Faltung mit dem Tiefpass rückgängig gemacht werden.

$$S[l_\mathrm{x}, l_\mathrm{y}] = S\left(f_\mathrm{x} = \frac{l_\mathrm{x}}{\tau_\mathrm{x}}, f_\mathrm{y} = \frac{l_\mathrm{y}}{\tau_\mathrm{y}}\right) = \frac{R[l_\mathrm{x}, l_\mathrm{y}]}{G[l_\mathrm{x}, l_\mathrm{y}]} = \frac{R[l_\mathrm{x}, l_\mathrm{y}]}{\alpha_{l_\mathrm{x}} \cdot \beta_{l_\mathrm{y}}} \tag{13}$$

Dabei ist jedoch folgendes zu beachten. Eine Multiplikation im diskreten Spektralbereich korrespondiert mit einer zirkularen (zyklischen) Faltung

$$r(x,y) = s(x,y) \circledast g(x,y) \tag{14}$$

im Ortsbereich. Daraus resultiert eine periodische Tiefpassfunktion $r(x,y)$. Dies entspricht jedoch nicht der Beschreibung eines möglichen optischen Systems bei dem eine lineare Faltung (10) durchgeführt wird. Um diese Problemstellung zu lösen, kann entweder die Bildinformation $s(x,y)$ oder der SoS-Filterkern $g(x,y)$ $(\tau_\mathrm{x}, \tau_\mathrm{y})$-periodisch sein (oder auch beide). In diesem Fall entspricht eine Periode der linear gefalteten Funktionen dem Ergebnis einer zyklischen Faltung.

Die Koeffizienten in (13) können dann genutzt werden, um daraus die unbekannten Partikelpositionen zu schätzen. Mögliche Schätzalgorithmen sind beispielsweise 2-D ESPRIT [14] oder 2-D Unitary ESPRIT [15], [16]. Diese Schätzalgorithmen liefern unter idealen Bedingungen exakte Ergebnisse für die Partikelpositionen. Unter praktischen Bedingungen wird die Schätzgenauigkeit jedoch beschränkt durch die numerische Genauigkeit, Rauschen, das die Abtastwerte beeinflusst, Amplitudenquantisierung oder der nicht-idealen, d. h. nicht punktförmigen Abtastung durch den Kamerasensor.

3 Datenrate

Ein wesentliches Ziel des beschriebenen Ansatzes ist die Reduzierung der Datenrate bei gleichzeitig hoher Lokalisierungsgenauigkeit. Damit soll die mögliche Aufnahmezeit für PIV/PTV-Systeme verlängert werden. Ausgehend von aktuellen Systemen soll im Folgenden der mögliche Gewinn durch den beschriebenen Ansatz untersucht werden.

Angenommen wird ein System, welches Bilder mit $1\,\mathrm{MPixel}$, $P \times Q = 1280 \times 800\,\mathrm{Pixel}$, bei einer Framerate von $7500\,\mathrm{s}^{-1}$ aufnimmt. Bei acht Bit Amplitudenauflösung resultiert daraus eine Datenrate von rund $7\,\mathrm{GByte/s}$. Werden diese Daten auf ein RAM der Größe $16\,\mathrm{GByte}$ geschrieben, so ist die Aufnahmezeit auf wenige Sekunden begrenzt.

Wird hingegen der beschriebene Ansatz verwendet, so hängt die resultierende Datenrate stark von der Partikeldichte ab. Diese bestimmt die notwendige Bandbreite des SoS-Filterkerns (11) und damit auch die erforderliche Abtastrate mit $M \times N$ Abtastwerten. Um den vorgestellten Ansatz anwenden zu können, muss eine ausreichende Anzahl an Abtastwerten verfügbar sein, damit die Positionen schätzbar sind.

$$P \geq M \geq |\mathbb{L}_{\mathrm{x}}| \geq 2K + 1 \qquad Q \geq N \geq |\mathbb{L}_{\mathrm{y}}| \geq 2K + 1 \qquad (15)$$

Für ein Bild der Größe $P \times Q = 1280 \times 800\ \mathrm{Pixel}$ ist die maximale Anzahl an Partikeln somit auf $K < \frac{800}{2} = 400$ pro Bild beschränkt.

Um den größtmöglichen Gewinn im Sinne der Datenrate bzw. Aufnahmezeit zu erzielen, muss die Partikeldichte möglichst gering sein. Dann gilt $M \ll P$ und $N \ll Q$, was heißt, dass eine möglichst kleine Untermenge der Pixel gespeichert wird.

Für die oben angegebenen Parameter zeigt Abb. 3 den möglichen Gewinn durch den vorgestellten Ansatz in Bezug auf die Datenrate (links) bzw. die maximal mögliche Aufnahmezeit (rechts). Dabei wird von Bildern der Größe $P \times Q = 1280 \times 800$ ausgegangen bei einer Bildausleserate von $7500\ \mathrm{s}^{-1}$. Die gestrichelte Linie illustriert den herkömmlichen Ansatz, bei dem stets alle Pixel abgespeichert werden, unabhängig von der Partikelanzahl K. Die durchgehende Linie hingegen zeigt den möglichen Gewinn für den vorgestellten Ansatz, wenn $M \times N \ll P \times Q$ Pixel ausgelesen werden, wobei die bestmögliche Konfiguration mit $M = |\mathbb{L}_{\mathrm{x}}| = 2K + 1$ und $N = |\mathbb{L}_{\mathrm{y}}| = 2K + 1$ gewählt wurde. Es ist erkennbar, dass sich in Abhängigkeit von der Partikelanzahl ein Unterschied von mehreren Größenordnungen einstellen kann.

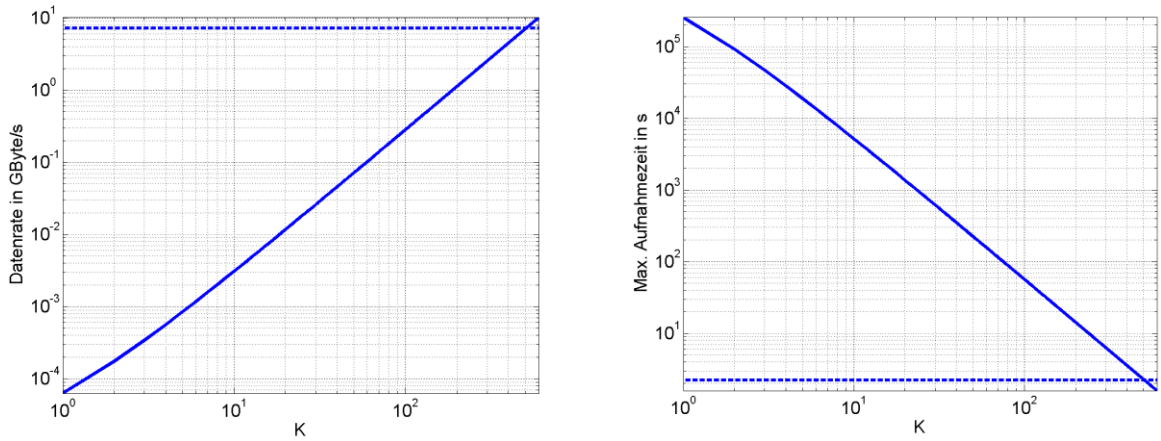

Abb. 3: Möglicher Gewinn durch den vorgestellten Ansatz (solid) im Sinne der Datenrate (links) bzw. der maximalen Aufnahmezeit (rechts) im Vergleich mit der herkömmlichen Methode (gestrichelt, alle Pixel werden abgespeichert). Wahl der minimalen Abtastrate mit $M = |\mathbb{L}_{\mathrm{x}}| = 2K + 1$ und $N = |\mathbb{L}_{\mathrm{y}}| = 2K + 1$

4 Simulationen

4.1 Beschreibung der Simulationsumgebung

Für die Simulation wurde ein Werkzeug entwickelt, bei dem unter Angabe der Partikeldichte eine Szene mit zufällig angeordneten Partikeln generiert werden kann, die ein parametrisierbarer Kamerasensor örtlich abtastet. Dabei kann die Abtastung durch die Sensitivität des Sensors und die Pixelanzahl in beiden Dimensionen beeinflusst werden. Weiterhin ist die Größe eines Pixels im Vergleich zur Partikelgröße definierbar. Das Hinzufügen geeigneter Filter, in diesem Fall ein SoS-Filter, macht es möglich, die punktuellen Intensitäten der Szene auf das Sensorabbild zu verteilen.

Für die Simulation werden Bilder der Größe $P \times Q = 128 \times 128$ generiert. Die Partikeldichte wird mit 10^{-3} Partikeln pro Pixel angenommen. Für statistisch gesicherte Ergebnisse wurden 10^4 zufällige Partikelverteilungen generiert. Die Intensitäten seien gleichverteilt. Für die Tiefpassfilterung wird ein SoS-Filter mit $|\mathbb{L}_x| = |\mathbb{L}_y| = 41$ und dreieckförmiger Koeffizientenverteilung verwendet. Die Abtastung erfolgt mit $M \times N = 41 \times 41$ Pixeln bzw. mit $M \times N = P \times Q$ Pixeln. Zur Realisierung eines Sensorbildes wird jeder Pixelwert durch Integration aus 32×32 Sub-Pixeln der generierten Szene bestimmt, welche über eine modifizierbare Aperturfunktion gewichtet werden können. Ferner wird die detektierte Amplitude mit acht Bit linear quantisiert. Für die Schätzung der Partikelpositionen wird der 2-D Unitary ESPRIT Algorithmus verwendet.

4.2 Ergebnisse

Zur Beurteilung der Schätzgenauigkeit für die Partikelpositionen wird der auf die Bildgröße normierte quadratische Fehler

$$\varepsilon = \left(\frac{\hat{x}_k - x_k}{\tau_x}\right)^2 + \left(\frac{\hat{y}_k - y_k}{\tau_y}\right)^2 \tag{16}$$

für jede geschätzte Partikelposition $\{\hat{x}_k, \hat{y}_k\}_{k=0}^{K_{\text{est}}-1}$ bestimmt. Die Schätzgenauigkeit der Amplituden bleibt unberücksichtigt. Abb. 4 (links) zeigt die relative Häufigkeit des Fehlers. Dabei ist zu erkennen, dass für die meisten der Partikel eine subpixelgenaue Positionsbestimmung möglich ist. Zusätzlich wird untersucht, wie viele der vorhandenen Partikel pro Bild detektiert wurden. Die Anzahl der detektierten Partikel wird mit K_{est} bezeichnet. Die relative Häufigkeit des Fehlers $K - K_{\text{est}}$ ist in Abb. 4 (rechts) dargestellt. Dabei ist zu erkennen, dass die Partikelanzahl häufig zu gering geschätzt wird. Diese tritt vor allem bei Partikeln mit kleinen Amplitudenwerten auf. Zusammenfassend kann beurteilt werden, dass eine subpixelgenaue Lokalisierung von Einzel-Partikeln möglich ist. Diese Genauigkeit lässt sich durch örtliche Überabtastung weiter erhöhen.

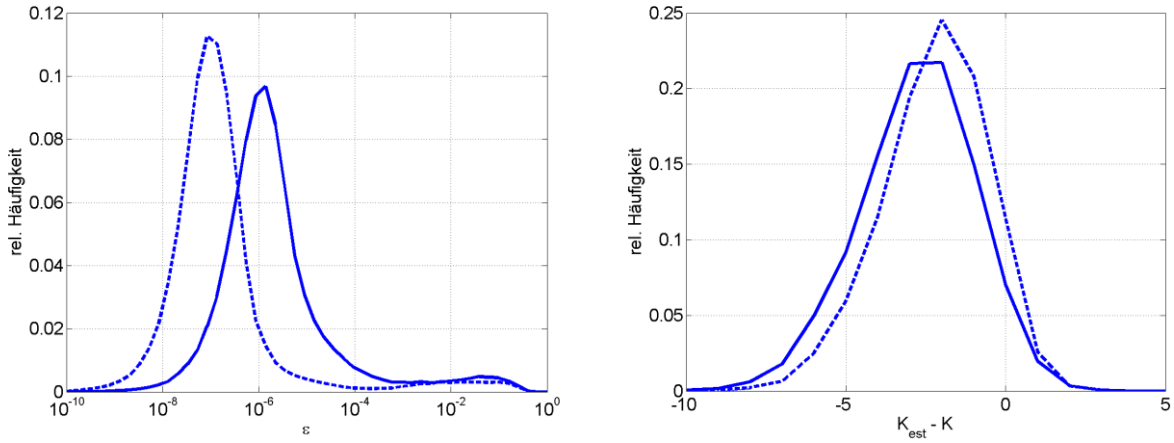

Abb. 4: Häufigkeit des normierten quadratischer Fehlers ε (links) und des Fehlers der geschätzten Partikelanzahl K_{est} (rechts). SoS-Filterkern mit $|\mathbb{L}_x| = |\mathbb{L}_y| = 41$ und Abtastrate mit $M \times N = 41 \times 41$ (solid) bzw $M \times N = P \times Q$ (gestrichelt). Schätzung mit 2-D Unitary ESPRIT.

5 Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre Förderung des DFG-Projekts „Geschwindigkeitsschätzung für dünn besetzte Bildsequenzen“.

6 Literatur

[1] Marziliano, P.: *"Sampling Innovations",* Dissertation, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL). Lausanne, Switzerland, 2001

[2] Maravic, I.: *"Sampling Methods for Parametric Non-Bandlimited Signals: Extensions and Applications",* Dissertation, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL). Lausanne, Switzerland, 2004

[3] Vetterli, M., Marziliano, P. und Blu, T.: *"Sampling Signals With Finite Rate of Innovation"*, June 2002, IEEE Transactions on Signal Processing, Bd. 50, S. 1417-1428

[4] Maravic, I. und Vetterli, M.: *"Exact Sampling Results for Some Classes of Parametric Nonbandlimited 2-D Signals"*, January 2004, IEEE Transactions on Signal Processing, Bd. 52, S. 175-189

[5] Maravic, I. und Vetterli, M.: *"Sampling and Reconstruction of Signals With Finite Rate of Innovation in the Presence of Noise"*, August 2005, IEEE Transactions on Signal Processing, Bd. 53, S. 2788-2805

[6] Tur, R., Eldar, Y.C. und Friedman, Z.: *"Innovation Rate Sampling of Pulse Streams With Application to Ultrasound Imaging"*, April 2011, IEEE Transactions on Signal Processing, Bd. 59, S. 1827-1842

[7] Ben-Haim, Z., Michaeli, T. und Eldar, Y.C.: *"Performance Bounds and Design Criteria for Estimating Finite Rate of Innovation Signals"*, August 2012, IEEE Transactions on Information Theory, Bd. 58, S. 4993-5015

[8] Michaeli, T. und Eldar, Y.C.: *"Xampling at the Rate of Innovation"*, March 2012, IEEE Transactions on Signal Processing, Bd. 60, S. 1121-1133

[9] Shannon, C.E.: *"Communication in the Presence of Noise"*, January 1949, Proc of the IRE, Bd. 37, S. 10-21

[10] Nyquist, H., *"Certain Topics in Telegraph Transmission Theory",* April 1928, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Bd. 47, S. 617-644

[11] Eldar, Y.C. und Kutyniok, G.: *"Compressed Sensing: Theory and Applications",* New York, NY, USA : Cambridge University Press, 2012

[12] Angierski, A., Richter, H., Kühn, V. und Damasche, N.: *"Extension of SoS Sampling Kernels for 2-D FRI Problem",* April 2012, Electronics Letters, Bd. 48, S. 527-528

[13] Mishali, M. und Eldar, Y.C.: *"Sub-Nyquist Sampling: Bridging Therory and Practice"*, November 2011, IEEE Signal Processing Magazine, Bd. 28, S. 98-124

[14] Vanpoucke, F., Moonen, M. und Berthoumieu, Y.: *"An Efficient Subspace Algorithm for 2-D Harmonic Retrieval",* Adelaide, Australia : 1994. Proc. of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP) 1994. Bd. 4, S. 461-464

[15] Haardt, M., Zoltowski, M., Mathews, C. und Nossek, J.: *"2D Unitary ESPRIT for Efficient 2D Parameter Estimation",* Detroit, MI, USA : 1995. Proc. of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP) 1995. Bd. 3, S. 2096-2099

[16] Haardt, M., Zoltowski, M., Methews, C. und Ramos, J.: *"ESPRIT and Closed-Form 2-D Angle Estimation with Planar Arrays"* in *"The Digital Signal Processing Handbook*" [Hrsg.] Madisetti, V.K. und Williams, D.B., Boca Raton, FL, USA : CRC Press, 1997, Kapitel 63