

PIV GESCHWINDIGKEITSMESSUNG MIT DRITTER ORDNUNG GENAUIGKEIT

S. Scharnowski, C.J. Kähler

Institut für Strömungsmechanik und Aerodynamik, Universität der Bundeswehr München, Werner-Heisenberg-Weg 39, 85577 Neubiberg

Digitale Particle Image Velocimetry, PIV, Genauigkeit

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird eine Methode vorgestellt, mit der erstmals Geschwindigkeitsfelder mit Genauigkeit dritter Ordnung aus PIV-Bildern berechnet werden können. Die Grundidee besteht darin, die wahrscheinlichste Stromlinie mit konstanter Krümmung aus dem Verschiebvektorfeld erster oder zweiter Ordnung und dessen räumlichen Ableitungen zu bestimmen. Im Beitrag wird die Korrektur von Vektorfeldern mit Genauigkeit erster oder zweiter Ordnung aus theoretischer Sicht beschrieben und an synthetischen PIV-Bildern eines stationären Wirbels überprüft. Das entwickelte Verfahren ist sehr allgemein und kann auf verschiedenste Auswertemethoden angewendet werden: Fenster-Korrelation basierte PIV, Single-Pixel Ensemble-Korrelation basierte PIV, Particle Tracking Velocimetry oder auf optischem Fluss basierte Methoden. Die Korrektur lässt sich ferner für alle 3D Erweiterungen dieser Auswerteverfahren anwenden.

Einleitung

Particle Image Velocimetry (PIV) ist ein optisches Messverfahren zur Bestimmung von Geschwindigkeitsfeldern in einer Ebene oder in einem Volumen aus der Verschiebung von Partikelbildern innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls für eine bestimmte optische Vergrößerung eines Abbildungssystems (Adrian und Westerweel, 2010; Raffel et al, 2007). Jedoch wird mit diesem Verfahren nicht etwa die Geschwindigkeit eines Fluides direkt gemessen, sondern jeder berechnete Vektor beschreibt lediglich die mittlere Verschiebung der diskretisierten und quantisierten Beugungsbilder von Partikeln innerhalb des Messvolumens. Um aus PIV Bilder möglichst viele Information zu extrahieren, muss die Dynamik der Ortsauflösung und die Dynamik der Geschwindigkeitsauflösung maximiert werden (Adrian, 1997).

Mit der Single-Pixel Ensemble-Korrelation kann die Dynamik der Ortsauflösung – im Vergleich zu herkömmlicher Fenster-Korrelation – wesentlich gesteigert werden, wenn eine große Anzahl an PIV-Bildpaaren vorliegt (Westerweel et al, 2004; Kähler et al, 2006; Scharnowski et al, 2012). Hohe räumliche Auflösung kann somit bereits bei relativ geringer optischer Vergrößerung erreicht werden (Kähler et al, 2012).

Um auch eine hohe Dynamik der Geschwindigkeitsauflösung zu erreichen, ist eine möglichst große Verschiebung der Partikelbilder erforderlich. Andererseits, führt der große zeitliche Abstand der beiden Laserpulse zu systematischen Abweichungen im Fall von gekrümmten Stromlinien, siehe Abb. 1.

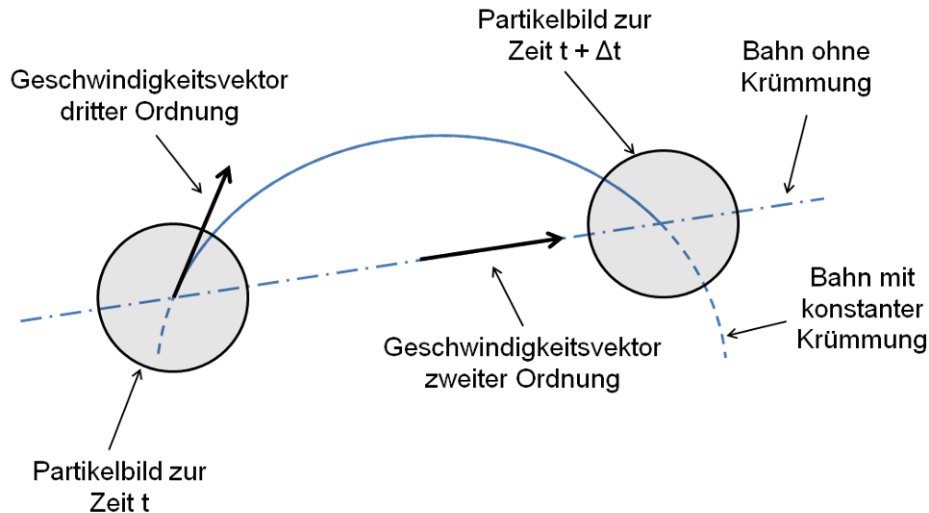


Abb. 1: Bahn ohne Krümmung und mit konstanter Krümmung: ermittelt aus den Partikelbildpositionen zur Zeit t und t + Δt.

Wereley und Meinhart (2001) analysierten eine Methode zur Bestimmung von Verschiebevektoren mit Genauigkeit zweiter Ordnung, Scholz und Kähler (2006) erweiterten dieses Verfahren für die Analyse von Single-Pixel Vektorfeldern. Um eine Genauigkeit höherer Ordnung zu erzielen, sind im Allgemeinen mehr als zwei Laserpulse erforderlich (Kähler und Kompenshans, 2000; Hain und Kähler, 2007).

Diese Arbeit verfolgt eine andere Herangehensweise: Die Krümmung der Stromlinien soll aus den Verschiebevektoren erster Ordnung berechnet werden. Unter der Annahme, dass sich benachbarte Stromlinien nicht kreuzen, wird aus den Verschiebevektoren und deren Gradienten ein Geschwindigkeitsfeld mit einer Genauigkeit dritter Ordnung rekonstruiert. Der Beitrag setzt sich aus zwei Teilen zusammen: Im folgenden Abschnitt wird die Korrektur zur dritten Ordnung aus analytischer Sicht beleuchtet und im Anschluss daran werden synthetische PIV-Bilder eines Lamb-Oseen Wirbels analysiert, um das entwickelte Verfahren zu validieren.

Mathematische Grundlagen

Die Auswertung von PIV-Bildern mit Standardverfahren geht von einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung der Partikel aus. Dabei verbindet das Verschiebevektorfeld erster Ordnung Anfangs- und Endpunkt auf einer Bahn ohne Krümmung. Dies ist der kürzeste mögliche Abstand, folglich ist es wahrscheinlich, dass bei komplexen Strömungen der tatsächliche Weg länger ist. Der Betrag des Verschiebevektors wird also im Allgemeinen unterschätzt. Nimmt man an, dass die tatsächliche Bahn in guter Näherung durch eine Kreislinie wiedergegeben werden kann, dann ist die systematische Abweichung abhängig vom Radius R und vom überstrichenen Winkel des Kreissegmentes ξ , wie in Abb. 2 dargestellt.

Benachbarte Verschiebevektoren, die zwei Punkte auf derselben Kreislinie verbinden können benutzt werden, um Ursprung und Radius des Kreises zu finden. Das Ziel ist es einen Vektor δ_1 mit $r \rightarrow 0$ zu finden, der folgende Bedingung erfüllt:

$$\beta_1 + \varphi = \beta_2 - \varphi \quad (1)$$

Unter dieser Bedingung liegen alle vier Punkte (Start- und Endpunkt des Verschiebevektors und des Nachbarn) auf einem Kreisbogen, der die wahrscheinlichste Bahn mit konstanter Krümmung repräsentiert. Aufgrund des endlichen Gitterabstandes der Datenpunkte erscheint

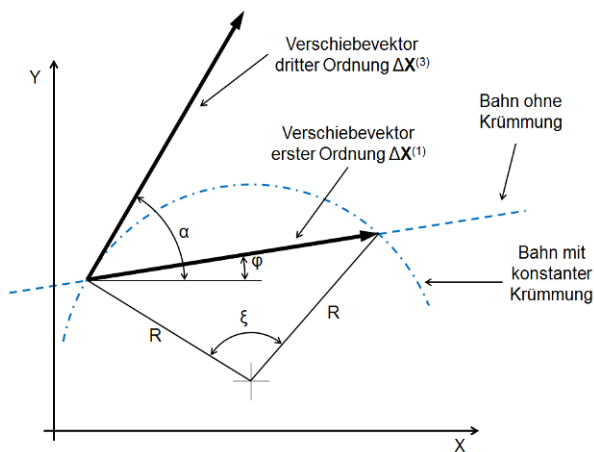


Abb. 2: Verschiebevektor erster und zweiter Ordnung.

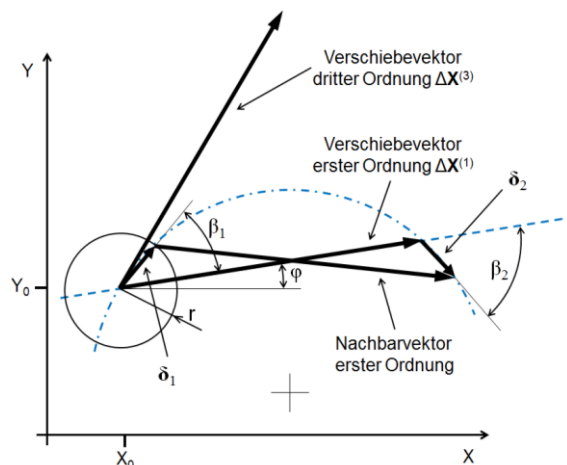


Abb. 3: Korrektur zur Genauigkeit dritter Ordnung.

es sinnvoll das Geschwindigkeitsfeld in eine Reihe (bis zur ersten Ordnung) zu entwickeln, um den benachbarten Vektor zu beschreiben:

$$\Delta X^{(1)}((X_0, Y_0) + \delta_1) = \delta_1 + \Delta X^{(1)}(X_0, Y_0) + \frac{\partial \Delta X^{(1)}}{\partial \delta_1} \cdot \delta_1 \quad (2)$$

So kann zwischen den Datenpunkten interpoliert werden. Mit Gl. (2) ergibt sich folgende Beziehung für den Verschiebevektor $\Delta X^{(1)}(X_0, Y_0)$ und dessen Nachbarn bei $(X_0, Y_0) + \delta_1$:

$$\Delta X^{(1)}(X_0, Y_0) + \delta_2 = \delta_1 + \Delta X^{(1)}((X_0, Y_0) + \delta_1) \quad (3)$$

Somit ergibt sich der Winkel β_1 wie folgt:

$$\beta_1 = \beta_2 - 2\varphi = \arctan\left(\frac{r \cdot \sin \beta_1 + V_X \cdot \cos \beta_1 + V_Y \cdot \sin \beta_1}{r \cdot \cos \beta_1 + U_X \cdot \cos \beta_1 + U_Y \cdot \sin \beta_1}\right) - 2 \cdot \arctan \frac{V_0}{U_0} \quad (4)$$

Wobei (U_0, V_0) die Komponenten des Verschiebevektors erster Ordnung sind und $U_X, U_Y, V_X,$ und V_Y die entsprechenden Ableitungen nach X oder Y bedeuten. Der Winkel φ gibt die Orientierung des Verschiebevektors erster Ordnung an. β_1 ist nicht explizit in Gl. (4) gegeben, kann aber im konkreten Fall numerisch ermittelt werden. Aus β_1 ergibt sich dann der Kreisradius wie folgt:

$$R = \frac{|\Delta X^{(1)}(X_0, Y_0)|}{2 \cdot \sin \frac{\xi}{2}} \quad (5)$$

Für den Bogenwinkel ξ gilt:

$$\frac{\xi}{2} = \beta_1 \quad (6)$$

Schließlich ergibt sich der Verschiebevektor dritter Ordnung zu:

$$\Delta X^{(3)}(X_0, Y_0) = \begin{pmatrix} R \cdot \xi \cdot \cos(\beta_1 + \varphi) \\ R \cdot \xi \cdot \sin(\beta_1 + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|\Delta X^{(1)}(X_0, Y_0)|}{\sin \beta_1} \cdot \beta_1 \cdot \cos(\beta_1 + \varphi) \\ \frac{|\Delta X^{(1)}(X_0, Y_0)|}{\sin \beta_1} \cdot \beta_1 \cdot \sin(\beta_1 + \varphi) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Der Betrag des Vektors in Gl. (7) wurde von der Länge der Sehne zur Bogenlänge vergrößert und der Winkel ist so gedreht, dass der Vektor tangential zum Kreisbogen orientiert ist. Für 3D-PTV oder tomographische PIV kann derselbe Ansatz verwendet werden: Ein benachbarter Vektor, der Gl. (1) erfüllt wird genutzt, um die Korrektur zur dritten Ordnung durchzuführen. Zusätzlich müssen die Vektoren δ_1 und δ_2 aus Abb. 3 in einer Ebene liegen.

Synthetisches Beispiel: Lamb-Oseen Wirbel

Der Lamb-Oseen Wirbel ist ein häufig verwendetes Model in der Strömungsmechanik. Die Umfangsgeschwindigkeit eines solche Wirbels V_φ stellt sich wie folgt dar:

$$V_\varphi(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp\left[\frac{-r^2}{r_c^2}\right] \right) \quad (8)$$

Γ ist die Gesamtzirkulation und r_c bezeichnet den Wirbelkernradius. Die Radialgeschwindigkeit ist Null, somit sind die Bahn- und Stromlinien ideale Kreise. Folglich sollten die Verschiebefelder nach der Korrektur dritter Ordnung frei von systematischen Fehlern sein. Um diese These zu verifizieren werden im Folgenden synthetische PIV-Bilder mit Fensterkorrelation, gemittelter Fensterkorrelation und mit Single-Pixel Ensemble-Korrelation analysiert.

Fensterkorrelation

Abbildung 4 zeigt im linken Teil ein momentanes Vektorfeld, welches mit Fensterkorrelation berechnet wurde (DaVis8.1, LaVision GmbH). Der simulierte Wirbel hat einen Kernradius von $r_c = 20$ px und eine Gesamtzirkulation von $\Gamma = 10^4$ px². Daraus ergibt sich eine maximale Verschiebung von 36 px. Solch große Verschiebungen sind für Geschwindigkeitsmessungen mit hoher Genauigkeit erforderlich. Die dazugehörige Umfangsgeschwindigkeit ist im rechten Teil von Abb. 4 für drei verschiedene Wirbelstärken ($\Gamma = [1,000; 5,000; 10^4]$ px²) und je zwei Auswertefenstergrößen (8×8 px und 16×16 px) dargestellt.

Aus Abb. 5 lassen sich folgende Schlussfolgerungen ableiten: (1) für den Testfall mit geringer Verschiebung (3.6 px) beträgt der maximale systematische Fehler etwa 0.01 px, was in der Größenordnung des Zufälligen Fehlers ist. (2) Im Bereich starker Gradienten ($r < 30$ px) sind kleine Auswertefenster erforderlich, um die Verschiebungen zuverlässig zu bestimmen. (3) Die Korrektur zur Genauigkeit dritter Ordnung führt im Falle der kleineren Auswertefenster (8×8 px) zu einem deutlich reduzierten systematischen Fehler.

Gemittelte Fensterkorrelation

Um die Eignung der entwickelten Methode für die Korrektur gemittelter Felder zu demonstrieren, wurden 100 PIV-Bildpaare eines stationären Lamb-Oseen Wirbels mit gemittelter Fensterkorrelation (sum-of-correlation) ausgewertet. Wie zuvor ist der Kernradius von $r_c = 20$ px und eine Gesamtzirkulation von $\Gamma = 10^4$ px². Abbildung 5 zeigt im linken Teil ein mittleres Verschiebevektorfeld und im rechten Teil die dazugehörige Umfangsgeschwindigkeit für drei verschiedene Wirbelstärken und eine Auswertefenstergrößen von 8×8 px.

Aus Abb. 5 ist ersichtlich, dass die Korrektur aus Gleichung (7) auch bei gemittelter Fensterkorrelation zu einer deutliche Reduzierung des systematischen Fehlers führt. Andererseits fällt auf, dass im Bereich starker Gradienten ($r < 30$ px) immer noch eine Abweichung zu den simulierten Werten besteht. Dieser systematische Fehler entsteht durch die endliche Größe der Auswertefenster.

Single-Pixel Ensemble-Korrelation

Single-Pixel Auswertung analysiert eine große Zahl von PIV-Bildpaaren und steigert dadurch die räumliche Auflösung und deren Dynamik (Kähler et al, 2012). Somit lassen sich auch Bereiche mit großen Gradienten sicher auswerten. Die Single-Pixel Ensemble-Korrelation wurde zuerst von Westerweel et al (2004) für die Untersuchung stationärer laminare Strömung eingesetzt. In den letzten Jahren wurde das Verfahren für die Analyse von periodischen Strömung (Billy et al, 2004), makroskopischer laminaren, transitionellen und turbulenten – auf der Grundlage der Arbeit von Kähler et al (2006) – gezeigt, wie Reynolds Spannungen in turbulenter Strömung aus der Form der Korrelationsfunktion ermittelt werden können (Scharnowski et al, 2012).

Für die Single-Pixel Auswertung wird die Korrelationsfunktion $C(\xi, \psi, X, Y)$ für jeden Pixel aus den ersten $A(X, Y)$ und zweiten Bildern $B(X, Y)$ eines Ensembles aus Bildpaaren wie folgt berechnet:

$$C(\xi, \psi, X, Y) = \frac{\sum_{n=1}^N [A_n(X, Y) - \bar{A}(X, Y)] \cdot [B_n(X + \xi, Y + \psi) - \bar{B}(X + \xi, Y + \psi)]}{\sigma A(X, Y) \cdot \sigma B(X + \xi, Y + \psi)} \quad (9)$$

für die Standardabweichung gilt:

$$\sigma A(X, Y) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [A_n(X, Y) - \bar{A}(X, Y)]^2} \quad (10)$$

(X, Y) sind die diskreten koordinaten der Bildebene und (ξ, ψ) sind die Koordinaten der Korrelationsebene. Aus der Position des Maximums der Korrelationsfunktion wird die mittlere Geschwindigkeit mit erster Ordnung Genauigkeit bestimmt. Genauigkeit zweiter Ordnung kann dadurch erreicht werden, dass der Verschiebevektor in die Mitte zwischen Start- und Endpunkt verschoben wird (Scholz and Kähler, 2006). Genauigkeit dritter Ordnung erfordert eine Korrektur der Verschiebevektoren erster Ordnung mit Gl. (7).

Abbildung 6 zeigt im linken Teil ein mittleres Vektorfeld berechnet mit der Single-Pixel Ensemble-Korrelation. Der simulierte Wirbel hat auch hier einen Kernradius von $r_c = 20$ px und eine Gesamtzirkulation von $\Gamma = 10^4$ px². Die dazugehörige Umfangsgeschwindigkeit ist im rechten Teil von Abb. 6 für drei verschiedene Wirbelstärken ($\Gamma = [1,000; 5,000; 10^4]$ px²) dargestellt.

Abbildung 6 zeigt deutlich, dass die Korrektur zur Genauigkeit dritter Ordnung auch im Fall von Single-Pixel Ensemble-Korrelation zu einer deutlichen Steigerung der Genauigkeit führt. Sogar für den Bereich stärkster Gradienten ($r < 30$ px) konnte der systematische Fehler durch die Korrektur vollständig eliminiert werden.

In Abb. 7 ist die Differenz der Beträge (links) und Orientierung (rechts) zwischen dritter und erster (oben) sowie zwischen dritter und zweiter Ordnung (unten) dargestellt. Bei der Genauigkeit erster Ordnung wird die Umfangsgeschwindigkeit unterschätzt (Abb. 7a) und die berechneten Stromlinien sind nach innen gekrümmt, was durch das positive Vorzeichen der Winkelkorrektur in Abb. 7b ersichtlich ist. Die Genauigkeit zweiter Ordnung liefert korrekte Ergebnisse für die Orientierung der Verschiebevektoren, jedoch ist die Vektorlänge fehlerbehaftet. Im Kern des Wirbels ($r < 20$ px) wird die Geschwindigkeit überschätzt und im Außenbereich unterschätzt. Diese Ergebnisse stimmen mit den theoretischen Überlegungen im Abschnitt „Mathematische Grundlagen“ überein.

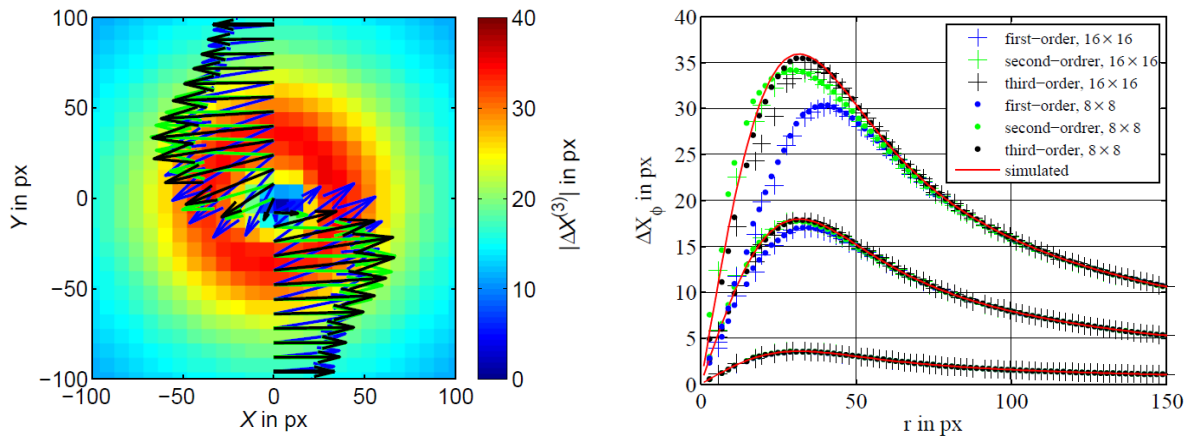


Abb. 4: Links: Verschiebevektorfeld mit Genauigkeit dritter Ordnung eines synthetischen Lamb-Oseen Wirbels berechnet mit Fensterkorrelation (16×16 px). Rechts: zugehörige Umfangsgeschwindigkeit mit Genauigkeit erster, zweiter und dritter Ordnung für drei verschiedene Wirbelstärken.

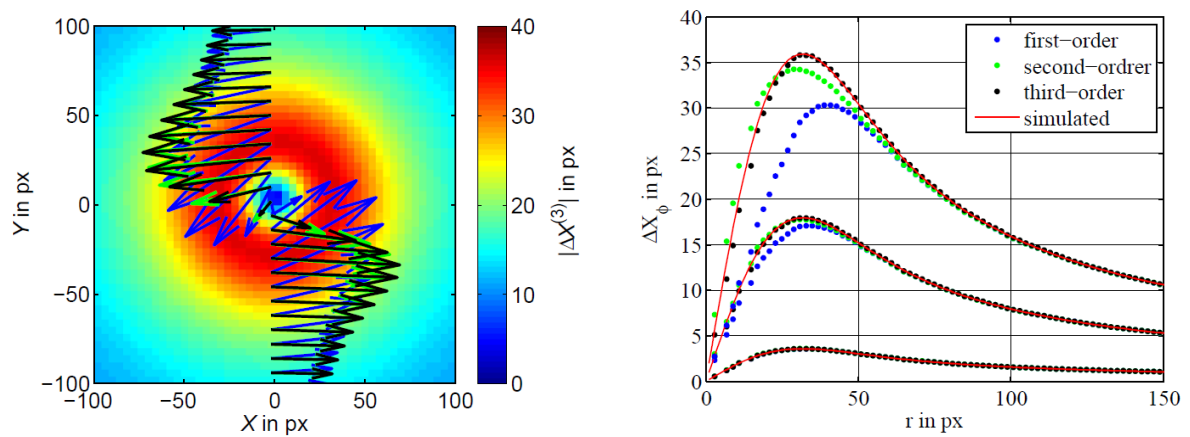


Abb. 5: Links: Verschiebevektorfeld mit Genauigkeit dritter Ordnung eines synthetischen Lamb-Oseen Wirbels berechnet mit gemittelter Fensterkorrelation (8×8 px). Rechts: zugehörige Umfangsgeschwindigkeit mit Genauigkeit erster, zweiter und dritter Ordnung für drei verschiedene Wirbelstärken.

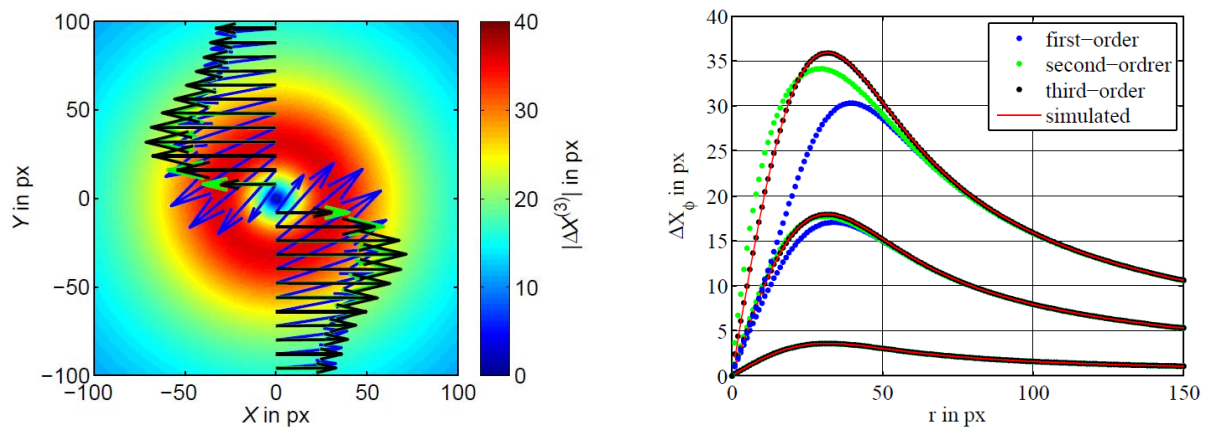


Abb. 6: Links: Verschiebevektorfeld mit Genauigkeit dritter Ordnung eines synthetischen Lamb-Oseen Wirbels berechnet mit Single-Pixel ensemble-Korrelation. Rechts: zugehörige Umfangsgeschwindigkeit mit Genauigkeit erster, zweiter und dritter Ordnung für drei verschiedene Wirbelstärken.

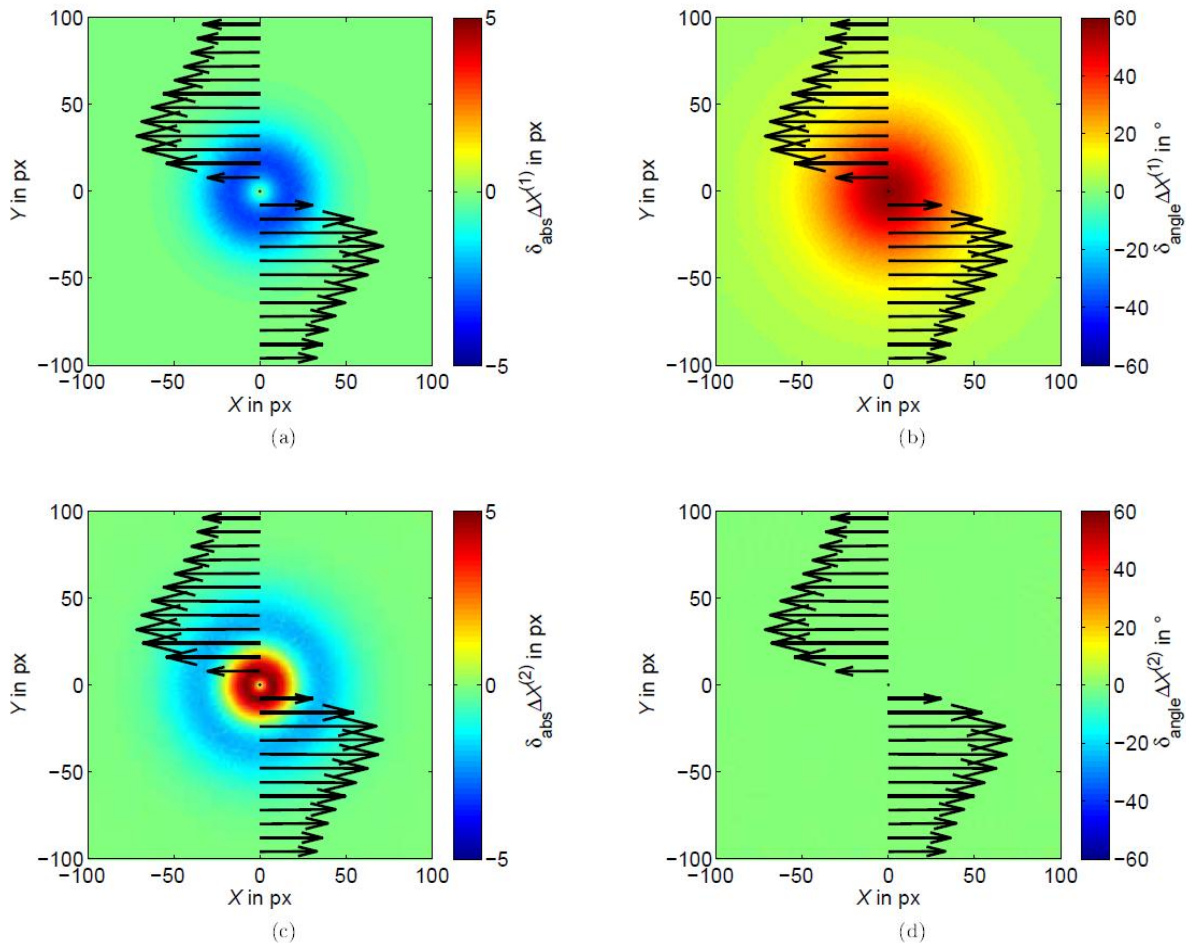


Abb. 7: Systematischer Abweichung des Betrages (links) und des Winkels (rechts) des Vektorfeldes erster (oben) und zweiter Ordnung (unten).

Schlussfolgerungen

Mit der vorgestellten Methode können 2-D und 3-D Geschwindigkeitsfelder aus PIV-Daten mit Genauigkeit dritter Ordnung berechnet werden. Dieser Fortschritt ist in besondere für die Analyse von PIV-Bildern wichtig, die mit geringer optischer Vergrößerung aufgenommen wurden. Die entwickelte Methode wurde an synthetischen Daten getestet und führt sowohl für Fensterkorrelation als auch für Single-Pixel Ensemble-Korrelation zu einer deutlichen Reduzierung der Messunsicherheit.

Danksagung

Das dargestellte Forschungsprojekt wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des Sonderforschungsbereiches SFB – TR40 (Technologische Grundlagen für den Entwurf thermisch und mechanisch hochbelasteter Komponenten zukünftiger Raumtransportsysteme) unterstützt.

Literatur

- Adrian RJ (1997) Dynamic ranges of velocity and spatial resolution of particle image velocimetry. *Meas Sci Tech* 8:1393, DOI 10.1088/0957-0233/8/12/003
- Adrian RJ, Westerweel J (2010) *Particle Image Velocimetry*. Cambridge University Press
- Billy F, David L, Pineau G (2004) Single pixel resolution correlation applied to unsteady flow measurements. *Meas Sci Tech* 15:1039-1045, DOI 10.1088/0957-0233/15/6/002
- Bitter M, Scharnowski S, Hain R, Kähler CJ (2011) High-repetition-rate PIV investigations on a generic rocket model in sub- and supersonic flows. *Exp Fluids* 50:1019-1030, DOI 10.1007/s00348-010-0988-8
- Hain R, Kähler CJ (2007) Fundamentals of multiframe particle image velocimetry (PIV). *Exp Fluids* 42:575-587, DOI 10.1007/s00348-007-0266-6
- Kähler CJ, Kompenhans J (2000) Fundamentals of multiple plane stereo PIV. *Exp Fluids* 29:70-77, DOI 10.1007/s003480070009
- Kähler CJ, Scholz U (2006) Transonic jet analysis using long-distance micro PIV. In: 12th International Symposium on Flow Visualization, Göttingen, Germany
- Kähler CJ, Scholz U, Ortmanns J (2006) Wall-shear-stress and near-wall turbulence measurements up to single pixel resolution by means of long-distance micro-PIV. *Exp Fluids* 41:327-341, DOI 10.1007/s00348-006-0167-0
- Kähler CJ, Scharnowski S, Cierpka C (2012) On the resolution limit of digital particle image velocimetry. *Exp Fluids*, DOI 10.1007/s00348-012-1280-x
- Raffel M, Willert CE, Wereley ST, Kompenhans J (2007) *Particle image velocimetry: a practical guide*. Springer Verlag
- Scharnowski S, Hain R, Kähler CJ (2012) Reynolds stress estimation up to single-pixel resolution using PIV-measurements. *Exp Fluids* 52:985-1002, DOI 10.1007/s00348-011-1184-1
- Scholz U, Kähler CJ (2006) Dynamics of flow structures on heaving and pitching airfoils. In: 13th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal
- Wereley ST, Meinhart CD (2001) Second-order accurate particle image velocimetry. *Exp Fluids* 31(3):258-268, DOI 10.1007/s003480100281