

VERWENDUNG DER SELBSTÄHNLICHKEIT VERDRALLTER FREI- STRAHLEN ZUR *BLACK BOX* MODELLIERUNG VON RÜHRWERKEN

USING SELF-SIMILARITY OF SWIRLED FREE JETS FOR NUMERICAL *BLACK BOX* SIMULATIONS

C. von Hörsten, J. Wenzlaff, F. Hüttmann, A. Leder

Universität Rostock, Lehrstuhl Strömungsmechanik, Albert-Einstein-Straße 2, 18051 Rostock

Rührwerke, Black Box Modellierung, RANS, LDA, Integrales Längenmaß, Isotropie
agitators, Black Box modelling, RANS, LDA, integral length scale, isotropy

Kurzfassung

Propellerrührwerke werden häufig zur Förderung der Durchmischung in technischen Anlagen verwendet. Die bisherige Auslegung dieser Rührwerkssysteme basiert meist auf Erfahrung und sicherheitsorientierter Überdimensionierung. Aus diesem Grund erfolgen Untersuchungen an der Universität Rostock zum Ausbreitungsverhalten der von den Propellerrührwerken erzeugten verdrallten Freistrahlen. Für dieses Ausbreitungsverhalten konnte gezeigt werden, dass es sich asymptotisch ähnlich, also unabhängig von Erzeuger, verhält und durch empirische Gleichungen beschreiben lässt [Sieg et al., 2011; Hörsten et al., 2011]. Präsentiert wird hier eine Methode zur *Black Box*-Modellierung der Rührwerke unter Verwendung dieses Ähnlichkeitsansatzes in numerischen Simulationen. Dabei werden durchgeführte LDA-Messungen des verdrallten Freistrahls, erzeugt durch sechs verschiedene Rührorgane, genutzt, um sowohl die charakteristische Längenskala zu bestimmen als auch die Gültigkeit von Turbulenzmodellen durch Betrachtung des Turbulenzstatus im Lumley Triangle zu beurteilen.

1 Einleitung

In der Prozeß- und Umwelttechnologie werden häufig Mikroorganismen zur Unterstützung von chemischen Reaktion eingesetzt. Bedeutend für die optimale Wirkungsweise der Mikroorganismen sind u.a. die Erzeugung und Einhaltung bestimmter Strömungsverhältnisse. Zu diesen Strömungsverhältnissen gehören die Einhaltung einer Mindestsohlgeschwindigkeit, um Ablagerungen zu verhindern, die Verhinderung von Totgebieten und Konzentrationsunterschieden in unterschiedlichsten Beckengeometrien sowie die Erzeugung von Turbulenz. Dieses hat zur Folge, dass der gesamte Beckeninhalt in Bewegung gehalten werden muss. In vielen Anwendungsgebieten wird dabei auf Propellerrührwerke zur Gewährleistung dieser Bedingungen zurückgegriffen. Die Rührwerke, die in dieser Untersuchung zur Anwendung gekommen sind, werden in Kläranlagen zur Abwasserbehandlung eingesetzt. Kläranlagen sind die größten Stromverbraucher auf kommunaler Ebene in Deutschland und verbrauchen mehr Strom als

Schulen und Krankenhäuser [Haber Kern et al., 2008].

Die Auslegung dieser Rührwerksanlagen basiert bis heute meist auf Erfahrung und sicherheitsorientierter Überdimensionierung. Da viele Rührwerke im Dauerbetrieb gefahren werden, besitzen die Betriebskosten, neben den Investitionskosten, einen entscheidenden Stellenwert. Zur Optimierung der Auslegung wurde an der Universität Rostock ein Ähnlichkeitsansatz für das Geschwindigkeits- und Turbulenzfeld verdrallter Freistrahlen entwickelt [Sieg et al., 2011]. Mittels dieses Ansatzes ist eine vereinfachte numerische Simulation, bei der das Rührwerk durch eine *Black Box* ersetzt wird, möglich. Das Strömungsfeld wird dabei mittels der Finiten-Volumen-Methode unter Verwendung der RANS-Gleichungen und eines Zwei-Gleichungsmodells stationär berechnet. Die Ummantelung der *Black Box* dient dabei als Dirichlet-Randbedingung für die Geschwindigkeitskomponenten und der turbulenten kinetischen Energie. Diese Größen können direkt aus dem Ähnlichkeitsansatz gewonnen werden. Für eine komplette Definition der Randbedingungen fehlt die Dissipation, so benötigt z.B. das $k - \epsilon$ -Modell die turbulente kinetische Energie und die Dissipation, um das Schließungsproblem der Turbulenz zu umgehen. Aus diesem Grund wird eine Abschätzung der Dissipation benötigt. In der Literatur finden sich mehrere Ansätze, die in den Untersuchungen von Kresta und Wood [1993] oder Sahu et al. [1999] näher betrachtet wurden. Wir verwenden den etablierten Ansatz aus der Dimensionsanalyse:

$$\epsilon = A \frac{u^{*2}}{L}. \quad (1)$$

L entspricht der charakteristischen Längenskala der Strömung, die mittels verschiedener Methoden bestimmt werden kann (s.u. Abs. 2). Mittels einer tauchbaren LDA-Messsonde wurden die induzierten Strömungsfelder sechs verschiedener Propellertypen im Rundlaufkanal der Universität Rostock vermessen. Der Aufbau ist in Hörsten et al. [2011] näher beschrieben. Bei den Propellertypen handelt es sich um drei skalierte Rührwerke (RW1M, RW2M, RW3M), zwei Modellbau-Schiffspropeller (SP260, SP360) sowie eine in Wasser eingesetzte Modellbau-Luftschraube (LS289) (s. Abb. 1). Die Parameter der Rührwerke sind in Tab. 1 festgehalten.

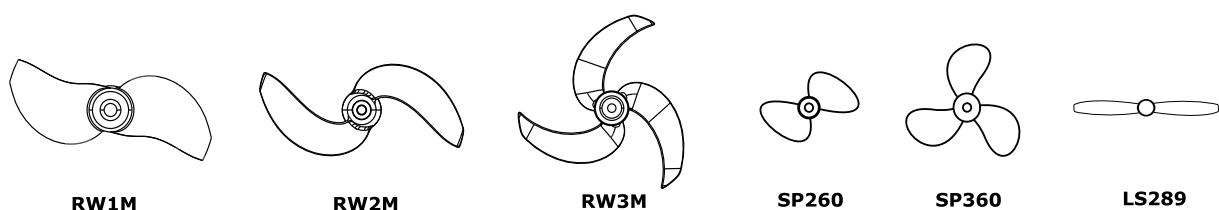


Abb. 1: Propellertypen

2 Bestimmung der Dissipation

Gl. 1 zeigt den von uns verwendeten Ansatz zur Bestimmung der Dissipation. In dieser Gleichung entspricht A einer Konstanten, die abhängig vom Rührorgan ist. Sahu et al. [1999] wählt diese zwischen 0,65 für Propeller und 1,0 für Turbinen. Im Gegensatz dazu quantifiziert Laufhütte und Mersmann [1987] den Wert zwischen 5,5 und 5,6 bei Propellern. u^* entspricht einer charakteristischen turbulenten Geschwindigkeit, welche entweder direkt aus den Geschwindigkeitsfluktuationen entnommen werden oder

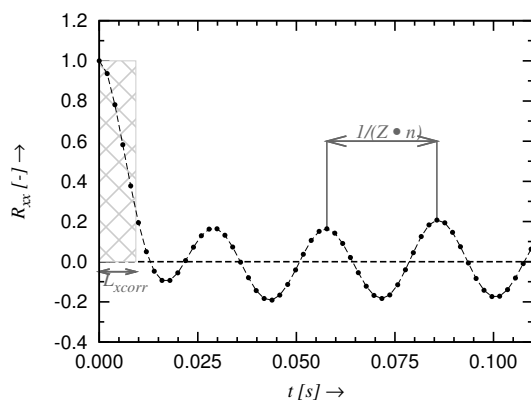
Tab. 1: Parameter der Propellertypen

Bez.	\varnothing [mm]	$\varnothing_H/\varnothing$ [-]	Z	n [min ⁻¹]	$Re \cdot 10^5$ [-]	K_t [-]	$10 \cdot K_Q$ [-]	S [-]
RW1M	150	1:5,0	2	700	8,25	0,0924	0,0655	0,0718
RW2M		1:4,8				0,2416	0,2160	0,0894
RW3M	135	1:5,4	3		6,68	0,2879	0,2878	0,1000
LS286	89	1:11,1	2	1000	4,15	0,1251	0,1323	0,1057
SP260	60	1:5,5	2	1000	1,88	0,2282	0,2778	0,1217
SP360			3			0,1921	0,2031	0,1057

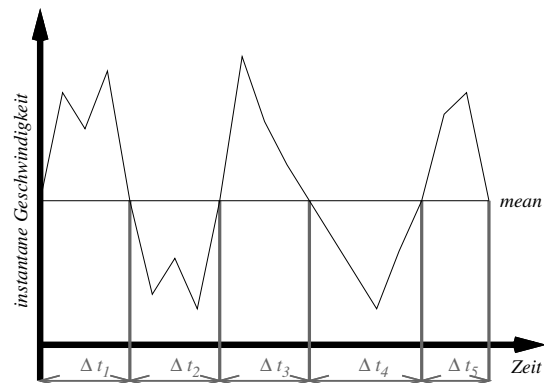
\varnothing : Durchmesser, \varnothing_H : Nabendurchmesser, Z: Flügelzahl, n: Drehzahl, Re: Reynoldszahl,
 K_t : Schubbeiwert, K_Q : Drehmomentenbeiwert, S: Drallzahl

aus der Wurzel der turbulenten kinetischen Energie k bestimmt werden kann. Eine Übersicht über die Untersuchungen, die diesen Ansatz für Rührer verwendeten, sind bei Kresta und Wood [1993] zu finden. Kresta und Wood [1993] und Sahu et al. [1999] erzielten mit dieser Methode sehr gute Ergebnisse.

Die charakteristische Längenskala L dient der Beschreibung der Strömung durch räumliche oder zeitliche Skalen. Sie beschreibt die mittlere Größe der turbulenten Wirbel in einer Strömung. Im Rahmen dieser Untersuchung dient sie jedoch besonders zur korrekten Definition der Randbedingungen bei der *Black Box*-Modellierung. Meist wird dabei lediglich die Längenskala der Hauptströmungsrichtung verwendet. Bei der Bestimmung der charakteristischen Länge kann auf zwei Verfahren zurück gegriffen werden, die nachfolgend beschrieben werden:



(a) Autokorrelation der Geschwindigkeitsfluktuationen; Daten vom RW3M, $n = 700\text{s}^{-1}$, $x/D = 0.0$, $r/D = 0.37$



(b) Prinzip der Wirbeldetektionsmethode

Abb. 2: Methoden zur Bestimmung der charakteristischen Längenskala

Autokorrelationsfunktion: Die Autokorrelation eines zeitlichen Signals eines statistischen Prozesse ist definiert als

$$R_{xx}(s) = \frac{\overline{u'(t) u'(t+s)}}{u'^2} \quad (2)$$

Die integrale Zeitskala τ wird aus dem Integral der Autokorrelation bestimmt.

Das Produkt aus der Zeitskala und der mittleren Geschwindigkeit ergibt die charakteristische Längenskala an einem Punkt

$$L_{xcorr} = \bar{u} \cdot \tau = \bar{u} \cdot \int_0^{\infty} R_{xx}(s) ds. \quad (3)$$

Ein Beispiel für eine ermittelte Autokorrelationsfunktion ist in Abb. 2a dargestellt. In der Praxis ist eine obere Grenze von ∞ nicht praktikabel, so dass der erste Nulldurchgang als Grenze gewählt wird. Festzustellen ist ferner das periodische Verhalten nach dem Nulldurchgang. Die Länge einer Periode korrespondiert mit der Blattdurchgangsfrequenz.

Wirbeldetektion: Diese Methode basiert auf Überlegungen von Sahu et al. [1999]. Sie verwendeten die Zeitreihe der Geschwindigkeitsdaten an einem LDA-Messpunkt (s. Abb. 2b). Wie zu erwarten fluktuiert der Geschwindigkeitswert um einen Mittelwert. Die Zeitspanne zwischen den beiden Durchgängen des Mittelwerts repräsentiert dabei einen Wirbel mit der Lebensdauer Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 , usw.. Zur Bestimmung der charakteristischen Länge wird zuerst die charakteristische turbulente Energie des Wirbels bestimmt:

$$k_{eddy,j} = \frac{\sum_i \frac{1}{2} u_i'^2}{\sum_i}. \quad (4)$$

i entspricht dabei den Messwerten zwischen den Durchgängen. Aus der Wirbelenergie wird eine charakteristische Wirbelgeschwindigkeit

$$u_{eddy,j} = \sqrt{2k_{eddy,j}} \quad (5)$$

berechnet und mit dieser eine charakteristische Wirbelgröße

$$l_{eddy,j} = u_{eddy,j} \cdot \Delta t_j. \quad (6)$$

Letztendlich wird die charakteristische Länge L_{eddy} an einem Punkt durch den gewichteten Mittelwert aller Wirbellängen bestimmt:

$$L_{eddy} = \frac{\sum_j l_{eddy,j} \Delta t_j}{\sum_j \Delta t_j}. \quad (7)$$

Diese beiden Methoden werden nachfolgend genutzt, um die charakteristische Länge für die verschiedenen Rührwerke an den Messpunkten¹ zu bestimmen und die Verfahren zu vergleichen. Abb. 3 zeigt das Verhältniss zwischen Rührwerksdurchmesser und charakteristischer Länge L aus Gl. 3 bzw. Gl. 7 in Abhängigkeit von der Lauflänge. Die Werte wurden durch den Mittelwert auf einer x/D -Ebene gewonnen. Hierbei wurden lediglich die Werte innerhalb des Strahls zur Mittelwertbildung herangezogen.

Es kann festgestellt werden, dass der Verlauf der charakteristischen Länge nahezu unabhängig von der Bestimmungsmethode ist. Nur im Fernfeld sind kleinere Unterschiede festzustellen. Des Weiteren ist bei der Wirbeldetektionsmethode eine größere Streuung festzustellen. Die Übereinstimmung in der Bestimmung der charakteristischen Längen konnte bei Propellern schon von Sahu et al. [1999] festgestellt werden. Für die Untersuchungen zur *Black Bock*-Modellierung erweist es weiterhin als Vorteil, dass sich auch bei der charakteristischen Länge eine Selbstähnlichkeit, also eine

¹Um eine gute Statistik zu gewährleisten, wurden nur Datenpunkte mit einer Datenrate größer als das fünffache der Drehzahl verwendet.

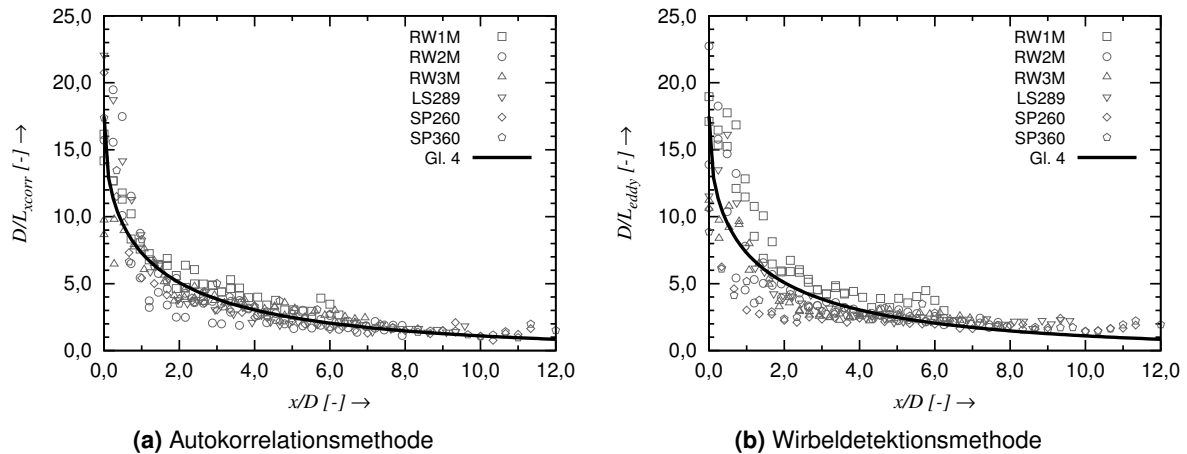


Abb. 3: Verlauf der charakteristischen Längen in Abhängigkeit vom Abstand zum Rührorgan

generelle Form für verdrehte Freistrahlen unabhängig vom Propellerrührwerke, ergibt. Der Verlauf der charakteristischen Länge lässt sich somit bestimmen aus

$$\frac{D}{L} = 17,5 \exp(-0,875 \cdot (x/D)^{0,5}). \quad (8)$$

Beide Methoden haben den Vorteil, dass die Längen aus einer großen Anzahl von Messdaten bestimmt werden und Fehler sich damit abschwächen. Ferner bieten beide Methoden die Möglichkeit ein gutes physikalisches Verständnis der dominierenden Wirbel zu bieten. Während die Wirbel detektionsmethode selbst bei schlechterer Statistik Ergebnisse liefert, ist eine ausreichend gute Statistik für die Autokorrelationsmethode unabdingbar, um die Flanke der Autokorelation aufzulösen. Die Autokorrelationsmethode ist hingegen jedoch rauschunempfindlicher.

Mehrere Simulationen mit verschiedenen Ansätzen und Abschätzungen wurden durchgeführt. Es zeigte sich, dass die Stabilität und die Konvergenz sehr stark von der Dissipation abhängig ist. Ferner variierten auch die Ergebnisse mit den verschiedenen Ansätzen zur Bestimmung der Dissipation. Wir konnten die besten Ergebnisse mit folgendem Ansatz gewinnen:

$$\epsilon = 0,65 \frac{k^{3/2}}{L}. \quad (9)$$

3 Betrachtung des Turbulenzstatus

Aus den gemessenen Werten der Reynold's Spannungen $\overline{u'_i u'_j}$ kann der Anisotropie-tensor a_{ij} berechnet werden mit

$$a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\overline{u'_i u'_i}} - \frac{1}{3} \delta_{ij}. \quad (10)$$

Die entsprechenden Invarianten, II_a und III_a , können aus den folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$II_a = a_{ij} a_{ji} \quad III_a = a_{ij} a_{jk} a_{ki}. \quad (11)$$

Diese Invarianten können an beliebigen Punkten zu jedem Zeitpunkt berechnet werden und in das Lumley Triangle (s. Abb. 4), oder auch *Invarianten Map* genannt, zur Charakterisierung der Turbulenz eingetragen werden.

Die Invarianten Map begrenzt alle natürlich vorkommenden Bedingungen von Turbulenz. Diese sind begrenzt durch die einzelnen Linien, so dass immer $\overline{u'_i u'_i} > 0$ gilt [Lumley und Newman, 1977]. Da die meisten Turbulenzmodelle auf der Boussinesq Hypothese basieren, also unter Annahme von Isotropie, sind diese Modelle nur dann zweckmäßig, wenn der Status in der Nähe des unteren Punktes, $II_a = III_a = 0$, angesiedelt ist.

Abb. 5 zeigt den Status der Turbulenz im verdrallten Freistrahler der verschiedenen Rührwerke auf den Ebenen $x/D = 0, 1, 3$ und 6 . Es zeigt sich eine relativ hohe Streuung, besonders in der propellernahen Ebene. Die Streuung wird wahrscheinlich durch die Nähe zum Propeller und die damit verbundene starke Phasenabhängigkeit hervorgerufen [Pêgo, 2007]. Ferner zeigt sich eine deutliche Tendenz in Richtung der rechten Kurve, so dass von einer axialsymmetrischen Expansion gesprochen werden kann, bei der die axiale Komponente dominierend ist. Mit zunehmender Lauflänge konzentrieren sich die Punkte erwartungsgemäß immer mehr in Richtung isotroper Turbulenz $II_a = III_a = 0$. Ferner zeigt sich eine Abnahme der Streuung und eine eindeutige Orientierung in Richtung axialsymmetrischer Expansion, wie es beim Freistrahler zu erwarten ist.

Die gewonnenen Messdaten zeigen, dass im Fernfeld von annähernder Isotropie gesprochen und somit der Ansatz der Boussinesq-Hypothese brauchbar ist.

4 Numerische Untersuchungen

Bei den numerischen Untersuchungen wurden die dreidimensionalen, zeitlich gemittelten Reynoldsgleichungen im kartesischen Koordinatensystem gelöst:

$$\rho \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \overline{\rho u'_i u'_j} \right). \quad (12)$$

Der Term $\overline{\rho u'_i u'_j}$ resultiert aus der Nicht-Linearität der Navier-Stokes Gleichungen und führt zu dem schon erwähnten Schließungsproblem, welches unter Verwendung verschiedener Turbulenzmodelle umgangen werden kann. Die Differentialgleichungen werden unter Verwendung einer Finite-Volumen-Methode mittels des frei zugänglichen Solvers *OpenFOAM* gelöst. Ein blockstrukturiertes Gitter mit 410760 Zellen diente zur Diskretisierung des Rechenraumes. Der Rechenraum entspricht einem Zylinder mit einem Durchmesser von 20 Propellerdurchmessern und einer Länge von 29 Propellerdurchmessern. Da die Simulation auf Grund der Gültigkeit des Ähnlichkeitsansatzes ab $x/D = 1,0$ beginnt, wird die Strömung somit bis $x/D = 30,0$ simuliert. Die Kopplung von Druck und Geschwindigkeit erfolgte mittels eines SIMPLE Algorithmus. Dieser Algorithmus setzt sich aus alternierenden, iterativen Berechnungen der lokalen

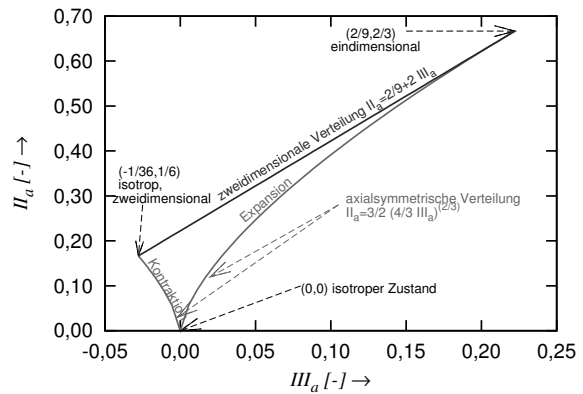


Abb. 4: Invarianten Map nach Lumley und Newman [1977]

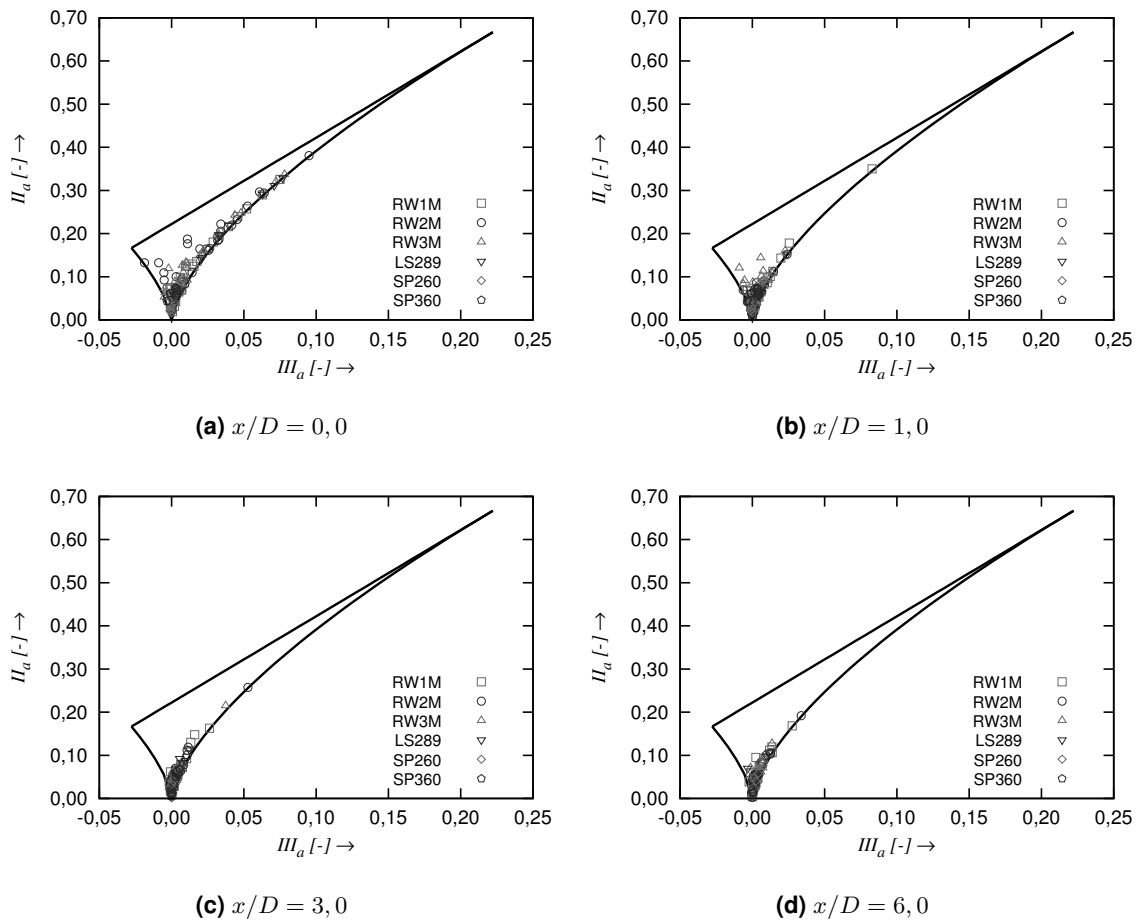


Abb. 5: Status der Turbulence im Lumley Triangle

Werte von Druck und Geschwindigkeit zusammen. Zur Stabilisierung des iterativen Prozesses wurde ein *upwind* Differenzenschema für alle Größen unter Verwendung der herkömmlichen Relaxationsfaktoren verwendet. Das $k-\omega$ -SST-Modell nach Menter und Esch [2001] wurde als Turbulenzmodell verwendet, da es die Vorteile des $k-\epsilon$ -Modells im Freistrahلبereich und die des $k-\omega$ -Modells in Wandnähe kombiniert. In diesem Fall lag keine Begrenzung durch Wände vor, dieses Modell soll jedoch für weitergehende Untersuchungen in verschiedenen Beckengeometrien Anwendung finden. Die Mantelfläche des Rechengebietes wurde als *Opening* und die entfernde Grundfläche als Druckauslass definiert. Die vordere Grundfläche wurde als Dirichlet-Randbedingung mit Geschwindigkeitswerten und turbulenter kinetischer Energie gemäß des Ähnlichkeitsansatzes nach Sieg et al. [2011] belegt. Die Wirbelfrequenz ω konnte aus $\omega = \epsilon / (C_\mu k)$ mit Gl. 9 vorgegeben werden.

Die axiale und die tangentielle Geschwindigkeitskomponenten sind die charakteristischen Größen verdrallter Freistrahlen, daher ist es wichtig, die Verläufe exakt aufzulösen. In Abb. 6 bis Abb. 8 werden die experimentellen Daten mit den numerischen Simulationen von den Rührwerk *RW3M* und *SP360* verglichen.

Der Verlauf der lokalen maximalen axialen und tangentialen Geschwindigkeiten ist in Abbildung 6 dargestellt. Die horizontale Achse entspricht dem normierten Abstand vom Rührorgan. Die gewonnenen numerischen Ergebnisse reproduzieren die Messungen un-

abhängig vom Rührorgan sehr gut. Im Nahbereich ergeben sich bei der axialen Geschwindigkeitskomponente gewisse Unterschiede, hervorgerufen durch die nicht exakte Auflösung der Übergangsbereichs zu einem Gauß'schen Profil. In den numerischen Simulation ist bei $x/D = 3,0$ schon ein komplettes Gauß'sches Profil erreicht, während in den Messung teilweise noch die Nachlaufdelle der Nabe vorhanden ist. Bei der tangentialen Geschwindigkeitskomponenten zeigt sich trotz der Unterschiede im dem Maximum des Randbedingungswertes ein übereinstimmender Verlauf. Bei $x/D = 6,0$ beträgt das Maximum noch lediglich 5% der axialen Geschwindigkeit.

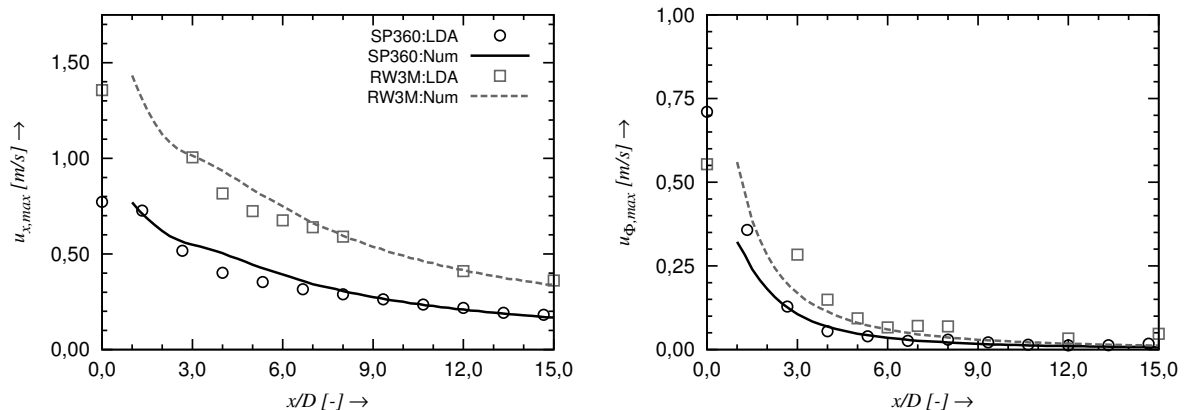


Abb. 6: Vergleich der maximalen, lokalen axialen und tangentialen Geschwindigkeit: Messung (Symbole) verglichen zu Numerik (Linien)

In Abb. 7 werden die numerisch berechneten radialen Profile der axialen und tangentialen Geschwindigkeit mit den Messungen verglichen. Der mit dem Radius $r_{50} = r(0,5 \cdot U_{max})$ normierte radiale Verlauf ist auf der horizontalen Achse aufgetragen. Die vertikale Achse repräsentiert die axiale bzw. tangentiale Geschwindigkeitskomponente, normiert mit der lokalen maximalen axialen Geschwindigkeit. Die Ebene $x/D = 1,0$ zeigt die Randbedingungen der numerischen Simulation. Es zeigt sich, dass die axiale Geschwindigkeit sehr gut aufgelöst wird, während sich bei der tangentialen Komponente Unterschiede im Maximum bei $x/D = 1,0$ ergeben. Im weiteren Verlauf stimmen die Profile von Messung und Numerik jedoch sehr gut überein. Sowohl die Profilform als auch das Maximum wird gut aufgelöst. Daraus lässt sich auch auf eine Übereinstimmung im Volumenstrom und der Strahlausbreitung schließen.

Für Mischungsprozesse ist die turbulente kinetische Energie eine relevante Größe. Wie in Abb. 8 zu erkennen ist, konnte auch diese im Maximum und Form sehr gut durch die numerischen Simulationen beschrieben werden.

Grundsätzlich kann also gezeigt werden, dass die Simulation des verdrallten Freistrahls, erzeugt durch Propellerrührwerke mittels der *Black Box*-Methode, sehr gut möglich ist und überzeugende Ergebnisse liefert.

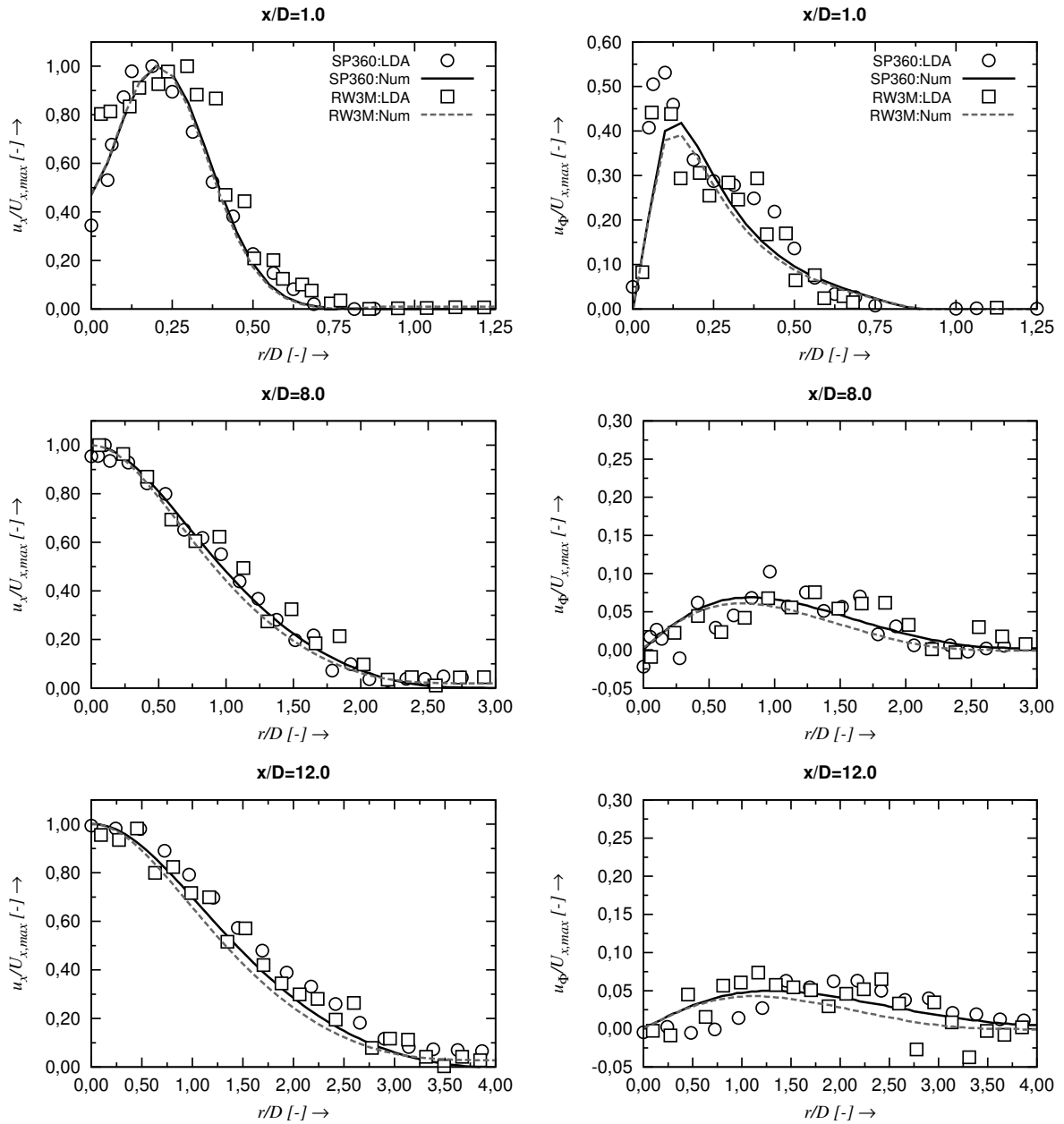


Abb. 7: Radiale Profile der axialen und tangentialen Geschwindigkeit: Messung (Symbole) verglichen zu Numerik (Linen)

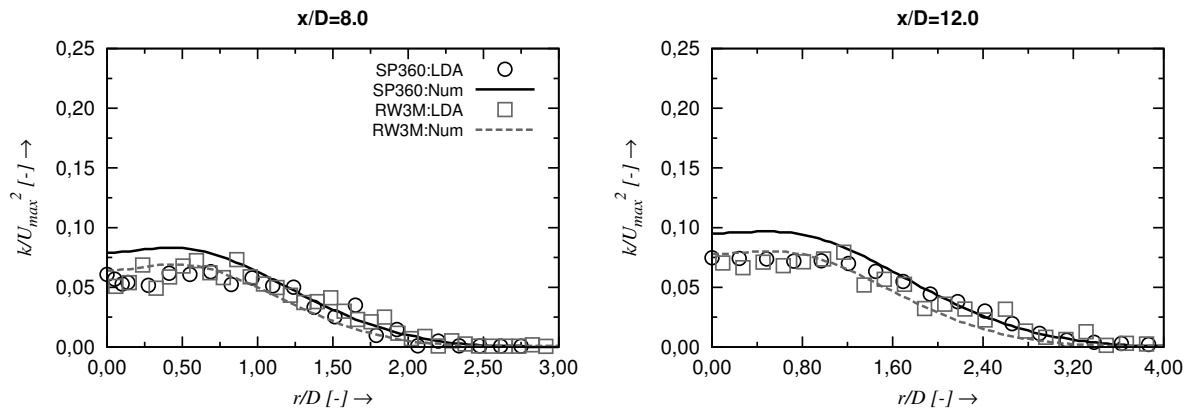


Abb. 8: Radiale Profile der turbulenten kinetischen Energie: Messung (Symbole) vergleichen zu Numerik (Linen)

5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Untersuchungen zum *Black Box*-Modellierung von Propellerrührwerken durchgeführt. Die Randbedingungen für die numerischen Berechnungen wurden aus einem Ähnlichkeitsansatz gewonnen. Ferner wurde eine Methode zur Definition der Dissipation aus dem Ähnlichkeitsansatz und dem charakteristischen Längenmaß abgeleitet. Die Isotropie, relevant für die Anwendung der Bousinesq Hypothese bei Zwei-Gleichungsmodellen, wurde an Messungen überprüft. Abschließend konnten die numerischen Simulation mit Messungen von zwei verschiedenen Propellern validiert werden. Eine Simulation mittels *Black Box*-Methode liefert somit realitätsnahe Ergebnisse. Für weiteren Untersuchungen ist das Verhalten der Rührwerke in verschiedenen Beckengeometrien und in Interaktion miteinander von Bedeutung.

Literatur

- Haberkern, B., Maier, W. und Schneider, U.: Steigerung der Energieeffizienz auf kommunalen Kläranlagen. Technischer Bericht, Umweltbundesamt, 2008.
- Hörsten, C. von, Bunse, K., Sieg, M., Hüttmann, F. und Leder, A.: Vergleich der Bestimmungsmöglichkeiten von Schub- und Drehmomentenbeiwerten an Modellrührwerken. In: Thess, A., Resagk, C., Ruck, B. und Leder, A. (Hg.) *Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik*. Dt. Ges. für Laser-Anemometrie, Karlsruhe, 2011. ISBN 978-3-9805613-7-2.
- Kresta, S.M. und Wood, P.E.: The flow field produced by a pitched blade turbine: characterization of the turbulence and estimation of the dissipation rate. In: *Chemical engineering science*, Band 48(10):S. 1761–1774, 1993.
- Lauffhütte, H.D. und Mersmann, A.: Local energy dissipation in agitated turbulent fluids and its significance for the design of stirring equipment. In: *Chemical engineering & technology*, Band 10(1):S. 56–63, 1987.
- Lumley, J.L. und Newman, G.R.: The return to isotropy of homogeneous turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics*, Band 82(01):S. 161–178, 1977.
- Menter, F. und Esch, T.: Elements of industrial heat transfer predictions. In: *16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering (COBEM)*. 2001, S. 26–30.
- Pêgo, João Pedro: *Advanced Fluid Mechanics Studies of Ship Propulsion Systems*. Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, Universitätsstraße. 4, 91054 Erlangen, 2007.
- Sahu, AK, Kumar, P., Patwardhan, AW und Joshi, JB: Cfd modelling and mixing in stirred tanks. In: *Chemical Engineering Science*, Band 54(13-14):S. 2285–2293, 1999.
- Sieg, M., Hörsten, C. von, Hüttmann, F. und Leder, A.: Ähnlichkeitsansatz für verdrahlte Unterwasserfreistrahlen. In: Thess, A., Resagk, C., Ruck, B. und Leder, A. (Hg.) *Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik*. Dt. Ges. für Laser-Anemometrie, Karlsruhe, 2011, S. 32.1–32.12. ISBN 978-3-9805613-7-2.