

ENTWICKLUNG EINES BILDGEBENDEN OPTISCHEN VERFAHRENS ZUR ERMITTLUNG DES 3D-SCHUBSPANNUNGSFELDES MITTELS DOPPELBRECHENDER FLÜSSIGKEIT

DEVELOPMENT OF AN IMAGING TECHNIQUE FOR 3D SHEAR STRESS MEASUREMENT USING STREAMING BIREFRINGENCE

T. Schneider*, L. Goubergrits*, U. Kertzscher*, C.O. Paschereit**

* Labor für Biofluidmechanik, Charité - Universitätsmedizin Berlin, 12200 Berlin
torsten.schneider@charite.de

** ISTA (HFI), Technische Universität Berlin, Müller-Breslau-Straße 8, 10623 Berlin

Schlagworte: Schubspannungsfeld, Doppelbrechung, Polariskop, Tomographie
Key words: shear stress field, birefringence, polariscope, tomography

Kurzfassung

Dieser Beitrag stellt die Entwicklung eines neuen optischen Messverfahrens zur direkten Ermittlung von dreidimensionalen Schubspannungsfeldern dar. Das Verfahren basiert auf dem Effekt der Doppelbrechung in strömenden Fluiden in Verbindung mit zugefügten Partikeln. Mit einem linear polarisierten, monochromatischen Lichtschnitt wird das Untersuchungsvolumen gescannt. Das in der Lichtschnittebene von den Partikeln reflektierte Licht passiert einen Polarisationsfilter und wird mit einem CCD-Sensor aufgenommen. Die Lichtintensität im Bild ist dann ein Maß für den Effekt der Doppelbrechung und damit der Schubspannung auf dem Weg des Lichts durch das Fluid. Das Untersuchungsvolumen wird durch eine Serie paralleler Lichtschnitte mit zwei synchronen Kameras tomographisch erfasst. Durch die Kombination mehrerer Bilder kann das Schubspannungsfeld dreidimensional aufgelöst werden. In diesem Beitrag werden das Messprinzip und Messaufbau erläutert, eine Empfindlichkeitsanalyse der Polariskop-Anordnung durchgeführt sowie eine Untersuchung zur Partikelwahl vorgestellt. An einem statischen Modellexperiment, in welchem drehbare PVC-Scheiben die durchleuchteten Fluidschichten nachbilden, wurde eine Machbarkeitsuntersuchung des Verfahrens durchgeführt.

Einleitung

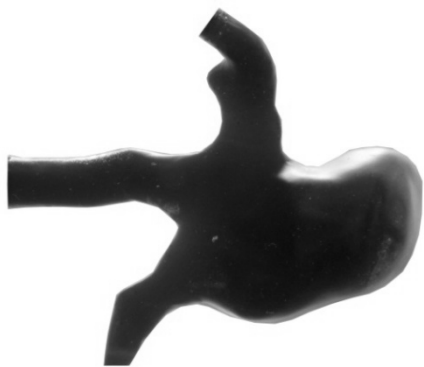
Die Ermittlung von 3D-Schubspannungsfeldern ist in den Ingenieurwissenschaften für verschiedene Disziplinen von Bedeutung. Beispiele sind die Aerodynamik, der Wasserbau und die Biofluidmechanik, in der Schubspannungen für biologische Vorgänge wie Thrombenbildung und Bluterstörung bestimmend sind (siehe Colman et al 2001). Zusätzlich ist eine direkte Messung von großem Vorteil verglichen mit Verfahren, die die (Wand-) Schubspannung über die Geschwindigkeitsmessung bestimmen (siehe Hutchins und Choi 2002). Die neue, hier vorgestellte Messmethode basiert auf dem Effekt der Strömungsdoppelbrechung, der von Maxwell beschrieben wurde und auch als Maxwell-Effekt bekannt ist (siehe Maxwell 1873). Dieser Effekt tritt in diversen Kolloid- und Polymerlösungen (z.B. Milling Yel-

low oder Vanadiumlösung V_2O_5) auf und wird im Allgemeinen mittels Polariskop (analog zur mechanischen Spannungsoptik) visualisiert (siehe Merzkirch 1987).

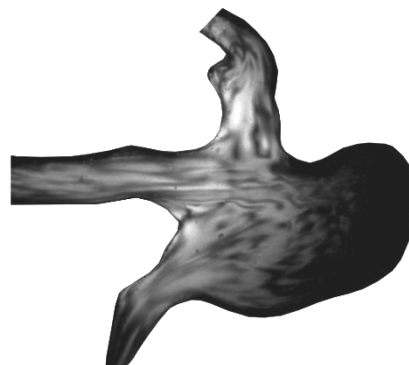
Als Doppelbrechung wird ein Vorgang bezeichnet bei dem Licht beim Eintritt in einen anisotropen Körper in einen ordentlichen und einen außerordentlichen Strahl zerlegt wird. Diese beiden Anteile sind senkrecht zueinander polarisiert und propagieren mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten (c_1 und c_2). Bei doppelbrechenden Fluiden ist die Geschwindigkeitsdifferenz ($c_2 - c_1$) bzw. Brechzahldifferenz ($n_2 - n_1$) eine Funktion der Schubspannung τ und ist linear proportional zur Schichtdicke und umgekehrt proportional zur Wellenlänge des eingestrahlten Lichts. Beim Verlassen des Körpers (z.B. eines Modells mit einer strömenden, doppelbrechenden Flüssigkeit) haben die beiden Lichtstrahlen einen Gangunterschied in der optischen Phase. Dieser Effekt entspricht einer Drehung der Polarisationsrichtung des Lichts um einen Winkel δ , der visualisiert und gemessen werden kann.

Dabei wird zur Untersuchung der Modelle ein Polariskop eingesetzt. In dieser Apparatur wird linear polarisiertes Licht durch die Strömung geleitet und passiert anschließend einen zusätzlichen Polarisator („Analysator“). Der Analysator schwächt das Licht abhängig vom veränderten Polarisationswinkel ab und somit ist die Lichtintensität eine Funktion der Schubspannung.

Bis jetzt wurde diese Technik nur für qualitative Visualisierungen verwendet, da bei diesen Versuchen das ganze Untersuchungsvolumen durchleuchtet wird. Der örtliche Zusammenhang zwischen Schubspannung und Effekt der Doppelbrechung ist deshalb bis dato nicht quantifizierbar. Abb. 1 zeigt am Beispiel eines Silikonmodells in der Form eines zerebralen Aneurysmas einer Basilararterie den Effekt der Strömungsdoppelbrechung in Vanadiumlösung.



Ohne Polariskop, ohne Strömung.



Mit Polariskop, mit Strömung.

Abb. 1: Mit V_2O_5 gefülltes Aneurysmamodell aus transparentem Silikon durchleuchtet von einer Glühlampe. Links: Ausgangszustand; Rechts: Strömungsvisualisierung mit Doppelbrechung im Polariskop. Die Bereiche mit unterschiedlichen Grauwerten korrespondieren mit Bereichen unterschiedlicher Schubspannung und Dicke.

Im Falle von Kolloidlösungen wurde z.B. der Zusammenhang zwischen Schubspannung und Brechzahldifferenz als Potenzreihe hergeleitet (siehe Wayland 1960 und 1964). Auf ausführliche Darstellungen über Doppelbrechung in Strömungen durch Pindera und Krishnamurthy 1978 und Pih 1980 sei hingewiesen.

Messprinzip

Das neue Messprinzip erweitert die existierende qualitative Methode der Strömungsvisualisierung mittels doppelbrechender Flüssigkeit zu einem quantitativen Verfahren (siehe Goubergrits 2006). Es basiert auf der Idee, die Lichtquelle im Inneren des Untersuchungsvolu-

mens zu positionieren. Dazu werden dem doppelbrechenden Fluid Partikel zugefügt, welche mit einem Lichtschnitt aus polarisiertem, monochromatischem Licht beleuchtet werden. Das von den Partikeln reflektierte Licht gelangt durch das Fluid zu einem Polarisationsfilter („Analytator“) und wird anschließend von einer Kamera aufgenommen. Die Lichtintensität im Bild ist dann ein Maß für den Effekt der Doppelbrechung auf dem Weg des Lichts durch das Fluid. Da das Licht auf dem gesamten Weg –von der Lichtquelle zum Partikel und vom Partikel zur Modellwand– durch das doppelbrechende Fluid verändert wird, ist für die Bestimmung des Schubspannungsfeldes ein Aufbau wie in Abb. 2 erforderlich. Als Lichtquellen können z.B. Natriumdampf-Niederdrucklampen, LEDs oder Laser verwendet werden, wobei bei letzteren kein Lichtpolarisator mehr nötig ist.

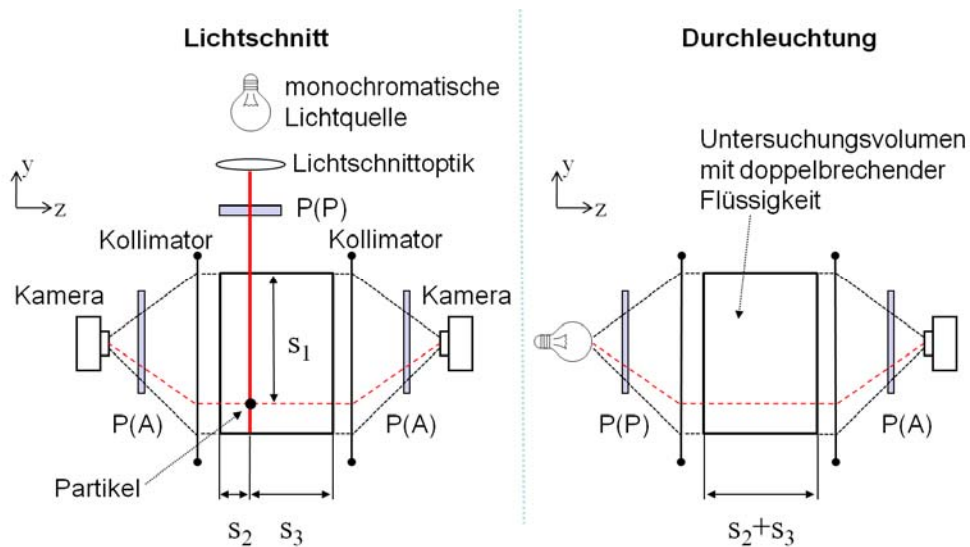


Abb. 2: Schematischer Aufbau der Messtechnik. Links: Konfiguration zur Aufnahme von Lichtschnitten; Rechts: Konfiguration zur Durchleuchtung des Gesamtvolumens. P(P) ist ein Polarisator zur Polarisierung des Lichts und P(A) ein Polarisator als Analytator.

Betrachtet man in Abb. 2 links ein sphärisches Partikel im Lichtschnitt, so reflektiert es das gleiche Licht in Richtung der linken und rechten Kamera. Dieses Licht wird entlang der unterschiedlichen Wege s_2 und s_3 verändert, wobei der Effekt der Doppelbrechung jeweils über diese Wege integriert wird (δ_2 bzw. δ_3). Dabei ist der Zustand des Lichts (Polarisationsrichtung δ_1), welches vom Partikel reflektiert wird, durch die Doppelbrechung entlang s_1 gegeben. Somit enthält das Bild der linken Kamera die Information über den Gesamteffekt der Doppelbrechung δ_L entlang s_1 und s_2 und das synchron aufgenommene Bild der rechten Kamera die Information über den Effekt δ_R entlang s_1 und s_3 . Damit δ_1 , δ_2 und δ_3 separiert werden können, ist noch eine Durchleuchtung des Volumens notwendig (Abb. 2 rechts), die den Effekt δ_G entlang des Gesamtweges s_2 und s_3 beinhaltet. Daraus entsteht ein lineares Gleichungssystem (Gl. (1) rechts) für die drei Unbekannten:

$$\left. \begin{aligned} \delta_L &= \int_{s_1} \frac{\partial \delta}{\partial s} ds + \int_{s_2} \frac{\partial \delta}{\partial s} ds =: \delta_1 + \delta_2 \\ \delta_R &= \int_{s_1} \frac{\partial \delta}{\partial s} ds + \int_{s_3} \frac{\partial \delta}{\partial s} ds =: \delta_1 + \delta_3 \\ \delta_G &= \int_{s_2} \frac{\partial \delta}{\partial s} ds + \int_{s_3} \frac{\partial \delta}{\partial s} ds = \delta_2 + \delta_3 \end{aligned} \right\} \begin{cases} \delta_1 = \frac{1}{2} (+\delta_G + \delta_L - \delta_R) \\ \delta_2 = \frac{1}{2} (+\delta_G - \delta_L + \delta_R) \\ \delta_3 = \frac{1}{2} (-\delta_G + \delta_L + \delta_R) \end{cases} \quad (1)$$

Die Daten der Durchleuchtung können alternativ zum Aufbau in Abb. 2 rechts auch aus Lichtschnittdaten an der Wand des Untersuchungsvolumens gewonnen werden.

Aus dem Zusammenhang zwischen Doppelbrechungseffekt (Drehung der Polarisationsrichtung bzw. Verringerung der Lichtintensität durch den Analysator) und Schubspannung kann das Untersuchungsvolumen 3D-aufgelöst werden. Dazu werden eine Serie paralleler Lichtschnitte mit je zwei Bildern und eine Durchleuchtung erstellt und die Spannungen aus diesen Daten berechnet.

Um das Messprinzip in eine Messtechnik zu überführen, müssen ausgehend von der obigen Beschreibung folgende Komponenten vorhanden sein:

- > Doppelbrechendes Fluid
- > Monochromatisches und polarisiertes Licht (mit Optik und Polariskop)
- > Partikel, die die Polarisationsrichtung bei der Reflektion erhalten
- > Zwei synchronisierte Kameras

Die Auswahl und Analyse von benötigten experimentellen Komponenten werden im nächsten Kapitel beschrieben.

Experimentelle Komponenten

Neben der Auswahl und Vermessung des doppelbrechenden Fluids ist der Aufbau der spannungsoptischen Apparatur ein grundlegender Schritt für die Entwicklung des Messverfahrens. Das aufgebaute Polariskop besteht aus zwei breitbandigen HN38 Folienfiltern (Screen-Lab, Deutschland). Der erste Polarisator ist fixiert und der zweite, der als Analysator dient, kann mit einer Genauigkeit von $0,1^\circ$ gedreht werden. Die Lichtintensität I ändert sich bei der Drehung des Analysators um einen Winkel α bei einer Ausgangsintensität I_0 nach dem Gesetz von Malus:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha \quad (2)$$

Es soll eine CCD-Kamera des Typs pco.1600 (PCO AG, Deutschland) mit einer Grauwertauflösung von 14bit verwendet werden. Da eine Überbelichtung vermieden werden muss und das Grundrauschen auf einen Wert von 100 Grauwerten (GW) eingestellt ist, können die 16384 möglichen Grauwerte praktisch nicht voll genutzt werden. Die Messgenauigkeit $d\alpha$ ist mit einer GW-Abweichung dI ausgehend von Gl. (2) über

$$dI = -2I_0 \cos \alpha \sin \alpha d\alpha \quad (3)$$

miteinander verknüpft. Abb. 3 zeigt für das Beispiel $I_{\max} - I_{\min} = 15000$ die erzielbare Messgenauigkeit für verschiedene Analysatorwinkel und angenommene Lichtabweichungen durch z.B. Kamerarauschen.

Es wird deutlich, dass eine Verdrehung des Analysators gegenüber der Richtung des Polarisators von 1° auf 10° die Messgenauigkeit des Analysatorwinkels um eine Größenordnung verbessern kann. Diese Analyseereigenschaft wird eine wichtige Rolle bei den Messungen mit Fluiden spielen. Wenn jeder Lichtschnitt bei $\alpha=0^\circ$ und $\alpha=45^\circ$ aufgenommen wird, so kann für größere Winkelbereiche die Genauigkeit der spannungsoptischen Messung gehalten werden. Zusätzlich ist es möglich, mit den Aufnahmen für beide Analysatorwinkel zu unterscheiden, ob die Gesamtdrehung der Polarisationsrichtung im Fluid einen Winkel von 90° (halbe Periode der $\cos^2\alpha$ -Funktion) überschritten hat oder nicht.

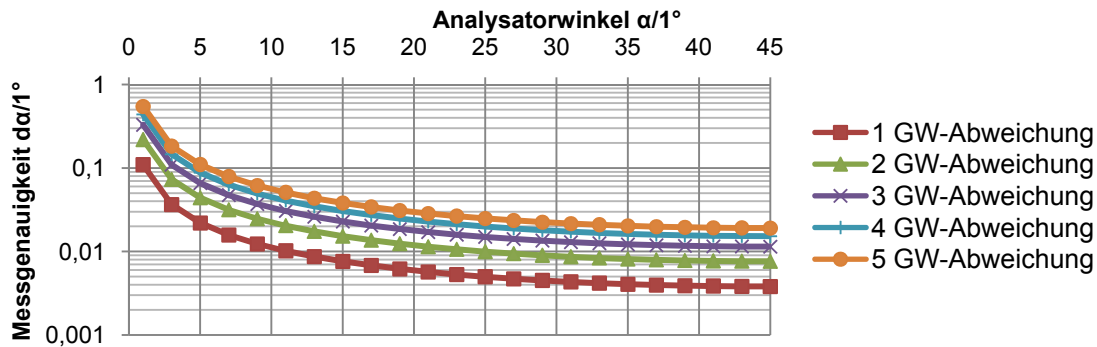


Abb. 3: Messgenauigkeit des Analysators für verschiedene Analysatorwinkel und Grauwertabweichungen mit $I_{\max}-I_{\min}=15000$.

Die Partikel sind eine weitere entscheidende Komponente des Messverfahrens. Nur wenn diese bei der Reflexion die Polarisationsrichtung des auftreffenden Lichts erhalten, ist die Messung der Schubspannungen nach dem vorgestellten Messprinzip möglich. Bei der Suche nach geeigneten Partikeln mit dieser Eigenschaft wurde folgendes Schlüsselexperiment durchgeführt. In eine mit Wasser gefüllte Küvette wurden Partikel zugefügt und mit einem polarisierten Laserlichtschnitt (Dauerstrichlaserdiode, 100mW, $\lambda=600\text{nm}$) beleuchtet. Das reflektierte Licht wurde durch einen Analysator von einer Kamera (Fastcam-Super 10K, Photon, Japan) aufgenommen. Das Erfolgskriterium des Experiments ist die Möglichkeit zur Abblendung des reflektierten Lichts aller(!) Partikel durch Drehung des Analysators.

Es wurden zehn verschiedene Partikelsorten getestet. Abb. 4 illustriert das Ergebnis für Silber beschichtete Vollglaskugeln GL-0179 (MO-SCI Corp., USA; 270mesh) – bei diesen Partikeln konnten 99,64% der hellen Bildpunkte ausgeblendet werden und man kann schließen, dass die Polarisationsrichtung erhalten blieb. Das besondere an dieser Partikelsorte ist die sphärische Form, wobei das verbleibende Licht wahrscheinlich auf mechanisch beschädigte Partikel zurückzuführen ist.

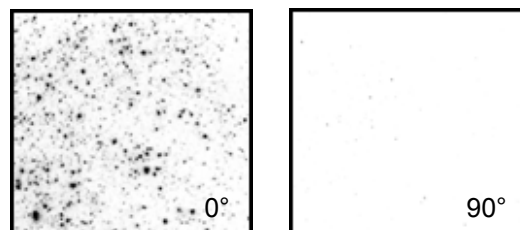


Abb. 4: Invertierte Bilder von Reflexionen sphärischer Partikel bei unterschiedlichem Analysatorwinkel (Links: $\alpha=0^\circ$; Rechts: $\alpha=90^\circ$).

1D-Versuch mit PVC-Scheiben

Als weiterer Entwicklungsschritt wurde überprüft, inwieweit aus Bilddaten einzelner Lichtschnitte auf die Polarisationsrichtung an der Lichtschnittposition zurückgerechnet werden kann. Dazu wurde ein statisches Modellexperiment auf Basis von PVC-Scheiben entworfen. In Tab. 1 wird die Überführung der Doppelbilder eines Fluidvolumens nach Abb. 2 in einen äquivalenten Durchleuchtungsversuch am Beispiel von zwei Lichtschnitten gezeigt. Dabei wurde der Effekt auf dem Weg s_1 aus Anschauungsgründen nicht berücksichtigt.

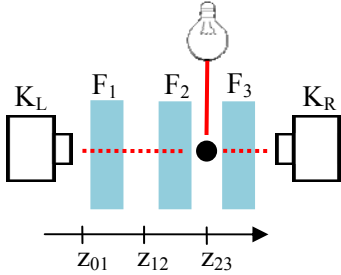
Zur Simulation des doppelbrechenden Fluids werden 1mm dicke, drehbare PVC-Scheiben mit $1,0^\circ$ Schrittweite verwendet. Befindet sich eine PVC-Platte in einem Polariskop so wird nach Schröder und Treiber 2002 die Lichtintensität durch folgende Gleichung gegeben:

$$I = I_0 \cos^2(2\beta) \cos^2\left(\frac{C(\sigma_2 - \sigma_1)t\pi}{\lambda}\right) \quad (4)$$

Dabei ist C die spannungsoptische Konstante des Materials, σ_1 und σ_2 die Hauptspannungen durch mechanische Belastung, t die Plattendicke und β der Winkel zwischen Polarisations- und einer der Hauptspannungsrichtungen.

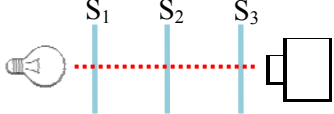
Tab. 1: Überführung des Lichtschnitt-Aufbaus in ein 1D statisches Modell.

Diskretisiertes Messprinzip:



Aufnahme	Position Lichtschnitt	Fluidschicht(en) in Bild K_L	Fluidschicht(en) in Bild K_R
1	z_{12}	F_1	F_2+F_3
2	z_{23}	F_1+F_2	F_3
Durchleuchtung	÷ oder z_{01}	÷	$F_1+F_2+F_3$

Äquivalentes Prinzip mit PVC-Scheiben:



Aufnahme	PVC-Scheibe(n)	Entspricht Bild K_L	Entspricht Bild K_R
1	S_1	1	÷
2	S_1+S_2	2	÷
3	$S_1+S_2+S_3$	÷	Durchleuchtung
4	S_2+S_3	÷	1
5	S_3	÷	2

In diesem Versuch wurde keine zusätzliche Last aufgebracht und somit ist nur der erste \cos^2 -Faktor aus Gl. (4) relevant. Man beachte, dass die Drehung der Scheibe um den Winkel β eine Drehung der Polarisationsrichtung um einen Winkel 2β verursacht. Die Scheiben wurden für Referenzmessungen mittig mit einer Aussparung versehen.

Um eine möglichst homogene Durchleuchtung zu erzielen, wurde das Licht eines $130 \times 110 \text{ mm}^2$ LED-Feldes bestehend aus 56 luftgekühlten 3W Luxeon Dioden (Philips Lumiled Lighting, USA) mit einer Wellenlänge von $\lambda=627 \text{ nm}$ durch eine diffuse PMMA-Platte auf eine Leinwand geworfen und diese als Lichtquelle für den in Abb. 5 links dargestellten Aufbau genutzt. Der über einen Bereich von 50×50 Pixel gemittelte Grauwert dient als Berechnungsgrundlage für die Bestimmung des Drehwinkels der Scheiben.

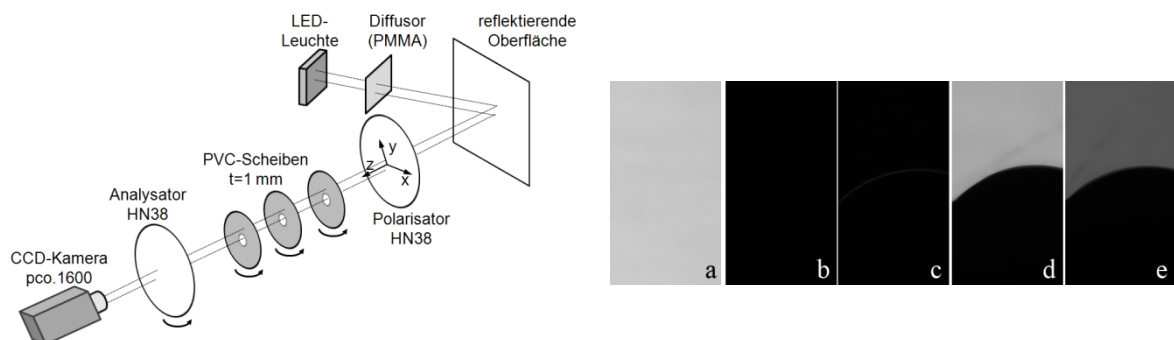


Abb. 5: 1D-Versuch mit PVC-Scheiben. Links: Aufbau; Rechts: Aufgenommen Bilder. In (d) und (e) wurden für diese Darstellung mit Adobe Photoshop® kleinere Kratzer und Staub entfernt.

In Abb. 5 rechts wird eine Serie von Aufnahmen des durchleuchteten Aufbaus dargestellt. Bild (a) zeigt das Ergebnis für parallele ($\alpha=0^\circ$) und (b) für gekreuzte Polarisatoren ($\alpha=90^\circ$) jeweils ohne PVC-Scheibe. Durch das Kreuzen der Polarisatoren wurde der mittlere Grauwert von 12500 auf 108 abgesenkt. In Bild (c) wurde zur Konfiguration aus (b) eine PVC-Scheibe mit $\beta=0^\circ$ hinzugefügt. Diese wurde in (d) auf $\beta=45^\circ$ gedreht – im unteren Bereich ist die Referenz des durch die PVC-Aussparung unbeeinflussten Lichts zu erkennen. In Bild (e) ist die die gleiche Konfiguration für $\beta=22^\circ$ dargestellt. An diesem Beispiel konnte aus den Grauwerten von (c) und (d) der letzte Winkel auf den Wert $21,88^\circ$ berechnet werden.

An einer Konfiguration mit vier Scheiben (entspricht drei Lichtschnitten), wurde die iterative Berechnung der Scheibenwinkel getestet. Der Algorithmus wurde in Matlab® realisiert und berücksichtigte neben Gl. (2) auch die Transmissionsgrade der einzelnen Scheiben. Die Versuche wurden mit parallel ausgerichteten Polarisatoren ($\alpha=0^\circ$) durchgeführt.

Abb. 6 die Ergebnisse von drei Konfigurationen: Links ein Versuch, in dem alle Scheiben um 8° gedreht sind und in der rechten Spalte zwei Versuche mit um jeweils 10° gedrehte Scheiben. In der oberen Reihe sind die eingestellten und aus den Grauwerten (nach dem Schema aus Tab. 1) berechneten Winkelsummen dargestellt. In der unteren Reihe sind die daraus iterativ separierten Winkel aufgetragen und entsprechenden Lichtschnittaufnahmen (Index L für linke und R für rechte Kamera) zugeordnet.

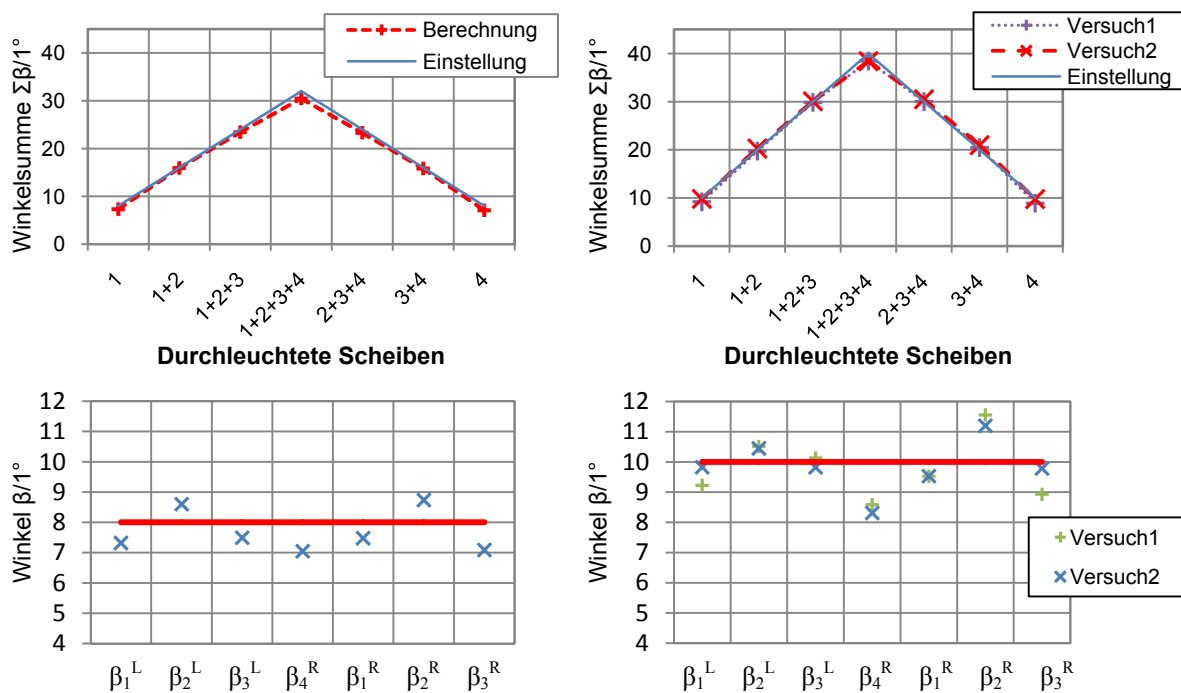


Abb. 6: Ergebnisse des 1D-Versuchs mit vier PVC-Scheiben.

Wie weiter oben diskutiert, entstehen die größten Abweichungen zwischen Berechnung und Einstellung für Anordnungen mit rund 90° zwischen Polarisations- und Analysatorrichtung. Dies lässt sich durch die Messungen bestätigen. So hat β_4^R im Versuch2 (10° Einstellung) die größte Abweichung mit $1,7^\circ$ bei einer Gesamtdrehung der Polarisationsrichtung von 80° (Scheiben: 40° , siehe Gl. (4)). Der mittlere Fehler des Aufbaus mit je 8° Scheibenwinkel beträgt $0,7^\circ$; bei den Versuchen mit 10° Scheibenwinkel $0,8^\circ$ (Versuch1) bzw. $0,6^\circ$ (Versuch2).

Zusammenfassung und Ausblick

Ein neues tomographisches Messverfahren zur direkten Bestimmung von 3D-Schubspannungsfeldern mit zwei Kameras wurde vorgestellt. Bei dem auf doppelbrechenden Flüssigkeiten basierenden Messverfahren wird keine Rotation des Untersuchungsobjektes oder der Kameras benötigt. Die wichtigsten experimentellen Komponenten, insbesondere Polarisoskop und Partikel, wurden analysiert. An einem statischen 1D-Modellexperiment mit drehbaren, durchleuchteten PVC-Scheiben konnte die Machbarkeit der Methode gezeigt werden.

Die nächsten Entwicklungsschritte gehen in zwei Richtungen. Zum einen wird die Beleuchtung des PVC-Aufbaus mit einem Lichtschnitt erfolgen, so dass Partikel (wie im Messprinzip vorgesehen) als Lichtquelle dienen. Zum anderen wird in einem Couette-Aufbau der Zusammenhang zwischen Schubspannung und Lichtintensitätsänderung im Polarisoskop durch Doppelbrechung bestimmt. Da V_2O_5 -Lösung giftig ist, nicht mit Metallen in Kontakt geraten darf und damit unzuverlässig ist, werden zusätzlich verschiedene Flüssigkeiten untersucht: z.B. Milling Yellow (siehe Merzkirch 1987) und das von Harris 1975 verwendete Natriumlaurylsulfat.

Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Projekt KE 900/11-1) für die finanzielle Förderung der durchgeführten Arbeiten.

Literatur

- Colman, R.W. (Hrsg.), Hirsh, J. (Hrsg.), Marder, V.J. (Hrsg.), Clowes, A.W. (Hrsg.), George, J.N. (Hrsg.), 2001: "Hemostasis and thrombosis", 4. Auflage, Philadelphia, Lippincott Williams and Wilkins.
- Goubergrits, L., Kertzsch, U., Paschereit, C.O., 2006: "Vorrichtung zur dreidimensionalen berührungslosen Erfassung einer örtlichen Verteilung der Lichtbrechung, Lichtpolarisation oder Lichtabsorption", Patent DE 102006013452B3; US5980568, 1-3.
- Harris, J., 1975: "Disturbances to viscometric flow patterns: birefringence observations", *Rheologica Acta* 14, pp. 169-172.
- Hutchins, N., Choi, K.S., 2002: "Accurate measurements of local skin friction coefficient using hotwire anemometry", *Progress in Aerospace Sciences*, 38, pp. 421-446.
- Maxwell, J.C., 1873: "On Double Refraction in a Viscous Fluid in Motion", *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 22, pp. 46-47.
- Merzkirch, W., 1987: "Flow Visualization", 2nd Edition, Orlando, Academic Press Inc.
- Pih, H., 1980: "Birefringent-fluid-flow method in engineering", *Exp. Mech.*, 20, pp. 437-444.
- Pindera, J.T., Krishnamurthy, A.R., 1978: "Characteristic relations of flow birefringence. Part I: relations in transmitted radiation", *Exp. Mech.*, 18, pp. 1-10.
- Schroeder, G., Treiber, H., 2002: "Technische Optik", 9. erw. Auflage, Würzburg, Vogel.
- Wayland, H. 1960: "Streaming birefringence of rigid macromolecules in general two-dimensional laminar flow", *J. Chem. Phys.*, 33, 769.
- Wayland, H., 1964: "Streaming birefringence as a rheological research tool", *J. Polymer Sci.*, 5, 1.