

ZERLEGUNG EXPERIMENTELL MIT PIV UND LDA ERMITTELTEN GESCHWINDIGKEITSFELDER IN KARHUNEN-LOÉVE MODEN

M. Brede, A. Frenkel und A. Leder

Universität Rostock, Lehrstuhl Strömungsmechanik,
Albert-Einstein-Str. 2, 18051 Rostock

Abstract

Die Nachlaufströmung hinter stumpfen Körpern ist im Bereich mittlerer Reynoldszahlen, beim Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömungsform, durch das gleichzeitige Auftreten mehrere komplexer Wirbelstrukturen gekennzeichnet. Am Beispiel des Nachlaufs eines quasi unendlich langen quer angeströmten Kreiszylinders können diese Phänomene exemplarisch untersucht werden. Mit moderner Messtechnik ist es möglich, die Nachlaufströmung als Reihe phasengemittelter oder instantaner Geschwindigkeitsfelder zu beobachten.

Die niederdimensionale Modellierung erlaubt eine Beschreibung der Strömung in einer Reihe orthogonaler Eigenmoden. Diese Moden liefern nicht nur eine Information über die grundlegenden Strömungsstrukturen, aus denen der Nachlauf zusammengesetzt ist, sondern sie geben auch Hinweise auf den Energiegehalt in den einzelnen Moden und damit eine Information über den Energiefluss in der Strömung. Die Kenntnis der Eigenmoden ermöglicht ferner eine schnelle numerische Modellierung der Strömung ohne numerische Simulation. Auf diese Weise kann heute z.B. eine aktive Strömungssteuerung implementiert werden.

Die vorliegenden Messdaten, phasengemittelte 3D-LDA Felder und Time-Resolved-PIV Sequenzen, die den Zylindernachlauf als Phasen- bzw. Zeitreihe von Geschwindigkeitsfeldern beschreiben, werden mit Hilfe der hierarchischen niederdimensionalen Karhunen-Loéve Zerlegung bearbeitet.

Einleitung

Moderne Lasermessverfahren in der Strömungsforschung liefern ein phasen- oder zeitaufgelöstes Geschwindigkeitsfeld, das außerdem räumlich sehr fein abgetastet vorliegen kann. Beispiele für diese raum-zeitliche Auflösung liefern die phasengetriggerte 3D-Laser-Doppler Anemometrie (Leder 1988, Brede 2002) oder die Time-Resolved PIV Methode (Brede 2003). Im ersten Fall entstehen Datensätze von 1000 vollständigen Geschwindigkeitsvektoren, die für jeden der 16 Phasenschritte vorliegen. Bei Time-Resolved PIV können derzeit mehrere Tausend Geschwindigkeitsfelder in einem Datensatz erfasst werden. Dabei stellt sich die Frage, wie das räumliche und zeitliche Verhalten der Strömung aus diesen Datensätzen extrahiert werden kann, wobei die ermittelte Information eine möglichst hohe strömungsphysikalische Relevanz aufweisen soll.

Eine Antwort auf diese Frage stellt die Analyse der Geschwindigkeitsfelder nach dem Ansatz von Karhunen (1946) und Loéve (1955) dar, auch bekannt als „proper orthogonal decomposition“ (POD, Lumley 1967). Bei dieser Methode, die hier nur kurz vorgestellt werden soll, wird eine zunehmend räumlich komplexer werdende Reihe von zeitunabhängigen orthogonalen Strömungsgrundmoden $u_i(\mathbf{x})$ den gemessenen Feldern angepasst. Die Summe dieser Mo-

den ergibt die angepasste Lösung (Galerkin-Approximation). Die Anpassung erfolgt dabei mit den Methoden der Variationsrechnung dergestalt, dass ein minimaler Anpassungsfehler entsteht. Die Zeitabhängigkeit der Lösung ergibt sich aus den zeitabhängigen Koeffizienten $a_i(t_m)$ zu jeder Mode.

Bislang ist offen geblieben, woher die Grundmoden stammen, die für die Zusammensetzung der Lösung erforderlich sind. Für dieses Problem hat Sirovich (1987) mit der Schnappschussmethode einen sehr effektiven Lösungsalgorithmus eingeführt. Die aus dem oben angegebenen Variationsproblem hervorgehende Fredholmsche Integralgleichung lässt sich danach auf ein Eigenwertproblem zurückführen, dessen Eigenfunktionen, die Grundmoden, sich aus einer Linearkombination der gemessenen instantanen oder phasengemittelten Geschwindigkeitsfelder ergeben.

Die strömungsphysikalisch relevante Information lässt sich nun aus den einzelnen Grundmoden ablesen, die, mit abnehmendem energetischen Gehalt und zunehmender Komplexität, einzelne kohärente Strömungsstrukturen zeigen. Durch Einsetzen der Lösung in die Bilanzgleichung für die turbulente kinetische Energie lassen sich in einer vertieften Auswertung zusätzlich sehr wertvolle Angaben über den Energiefluss zwischen den einzelnen Grundmoden gewinnen (Noack 2003).

Prinzip der KL-Moden-Zerlegung

Ausgangspunkt für die Karhunen Loève Zerlegung von Strömungen ist ein an M diskreten Zeitpunkten t_m gegebenes Geschwindigkeitsfeld $\{\mathbf{u}^m(\mathbf{x})\}_{m=1}^M$ mit $\mathbf{u}^m(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^m(\mathbf{x}, t_m)$ für den Ortsvektor \mathbf{x} im Gebiet Ω .

Zu diesem Feld ist ein Orthonormalbasis $\{\mathbf{u}_i(\mathbf{x})\}_{i=0}^N$ ($N \leq M$) gesucht, die das Feld mit der Galerkin-Approximation

$$\mathbf{u}^{[N]}(\mathbf{x}, t_m) := \sum_{i=0}^N a_i(t_m) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \quad (1)$$

mit $a_0 = 1$ und $\mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}$ im energetisch optimalen Sinne beschreibt. Mit anderen Worten, von allen möglichen Galerkin-Approximationen $\mathbf{u}^{[N]}(\mathbf{x}, t_m)$ diejenige, welche, analog zur Gaußschen Fehlerquadratmethode, den energieorientierten Fehler ε^2 minimiert. Man erhält

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{M} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \sum_{m=1}^M \left[\mathbf{u}^m(\mathbf{x}, t_m) - \mathbf{u}^{[N]}(\mathbf{x}, t_m) \right]^2 \rightarrow \min \quad (2)$$

als zu minimierenden Fehler mit den Einschränkungen der Orthonormalität

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j d\mathbf{x} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \delta_{ij} \quad (3)$$

sowie den Koeffizienten für die Galerkin-Approximation

$$a_i^m = a_i(t_m) = (\mathbf{u}^m, \mathbf{u}_i) \quad (4)$$

Die Lösung für alle \mathbf{u}_i gewinnt man durch Einsetzen der Beziehungen (1), (3) und (4) in (2) und anschließender Variation der verbleibenden variablen Terme.

Schließlich entsteht die Fredholmsche Integralgleichung, die die Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte λ_i und Eigenfunktionen \mathbf{u}_i darstellt:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{u}^m(\mathbf{x}) \mathbf{u}^m(\mathbf{x}') \right) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{u}_i(\mathbf{x}') \quad i = 0, \dots, N \quad (5)$$

Für die Eigenfunktionen (Grundmoden) gilt nach Sirovitch

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \alpha_i^m \mathbf{u}^m(\mathbf{x}) \quad (6)$$

Als Lösungsgleichung ergibt sich damit aus (5)

$$\sum_{m=1}^M \alpha_{im} C_{jm} = \lambda_i \alpha_{ij} \quad \text{mit} \quad (7)$$

$$C_{jm} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \mathbf{u}^j(\mathbf{x}) \mathbf{u}^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Nach der Lösung des Eigenwertproblems (7) können dann mit Hilfe der α_{ij} und (6) direkt die Grundmoden $\mathbf{u}_i(\mathbf{x})$ berechnet werden.

Ergebnisse – Modenzerlegung auf der Basis von LDA Daten

Der in MATLAB programmierte Auswertalgorithmus der Karhunen-Loève (KL) Zerlegung wurde zunächst auf Datensätze angewendet, die zuvor am Lehrstuhl für Strömungsmechanik der Universität Rostock mit dem Verfahren der phasengetriggerten 3D-Laser Doppler Anemometrie ermittelt wurden. Gegenstand der Messungen ist ein quer angeströmter Kreiszylinder mit einem Längen-Durchmesser-Verhältnis von $L/D=29$. Die dargestellten Ergebnisse beziehen sich auf eine Reynoldszahl von $Re=5000$, weitere Ergebnisse für $Re=10000$ und $Re=20000$ liegen vor. In Abbildung 1 sind die KL-Moden 1 - 6 für eine Nachlaufebene senkrecht zum Zylinder dargestellt, mit der Anströmung von links. Die Vektoren zeigen dabei das relative Geschwindigkeitsfeld der jeweiligen Mode abzüglich der zeitgemittelten Strömung, die Farbflächen das Feld der relativen Wirbelstärkekomponente $\omega_z / |\omega_z|_{\max}$. Der absolute, zeitabhängige Beitrag zum gesamten Geschwindigkeitsfeld ergibt sich durch Multiplikation mit den Koeffizienten $a_i(t_m)$ die rechts neben den Moden dargestellt sind. Der Zylinder liegt links außerhalb der dargestellten Ebene mit einem Mittelpunkt bei $x/D=-0,5$ und $y/D=0$.

Insgesamt zeigen die Moden die Abweichung der Strömungsstruktur vom zeitgemittelten Feld, das im Fall des Zylindernachlaufs aus einem symmetrischen Wirbelpaar im Rückströmgebiet hinter dem Zylinder besteht. Die KL-Moden treten hier wie üblich paarweise auf. Die Moden 1 und 2 zeigen die periodische Struktur der ablösenden Wirbelstraße von $x/D > 1$, sowie im Bereich der ablösenden Scherschichten die Wechselbewegung bei der Wirbelentstehung. Die zeitliche Periodizität entsteht durch die Kombination der Moden wenigstens eines Paares unter Berücksichtigung der Koeffizienten $a_i(t_m)$.

Die folgenden Moden 3 und 4 zeigen dagegen deutlich periodische Strukturen auf beiden Wirbelstraßenseiten, die gegenüber den Primärwirbeln die halbe Wellenlänge aufweisen. Diese Periodizität ist aus der Spektralanalyse von LDA-Messungen bereits bekannt (Brede 2004), allerdings lässt sich erst mit Hilfe der KL-Zerlegung die räumliche Verteilung und Struktur der für diese Periodizitäten verantwortlichen Moden genau angeben. Die Abnahme des Energiegehalts der Moden ist an dem Rückgang der Amplitude des Koeffizienten von 0,25 auf 0,03 zu erkennen. Die Moden 5 und 6 zeigen wiederum Strukturen mit einer kürzeren Wellenlänge, sie entspricht einem Drittel der Wellenlänge der Primärwirbel. Deutlich ist hier der Bereich des Rezirkulationsgebietes mit den Einflüssen der beiden Scherschichten vom Bereich der ausgebildeten Wirbelstraße zu unterscheiden. Die Wirbelstrukturen in die-

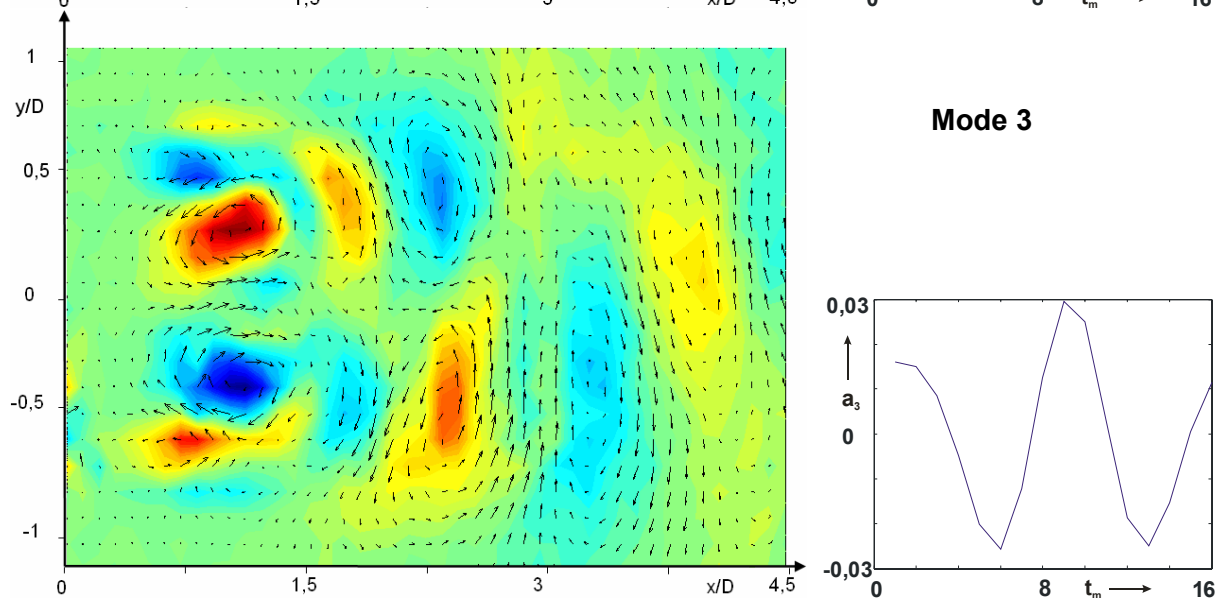
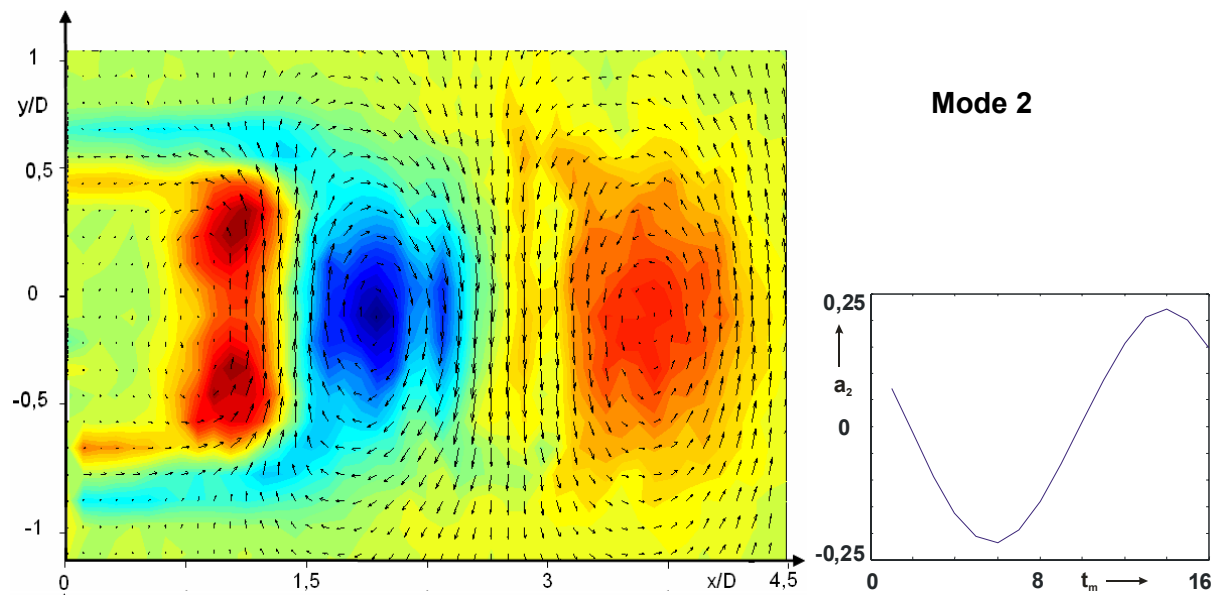
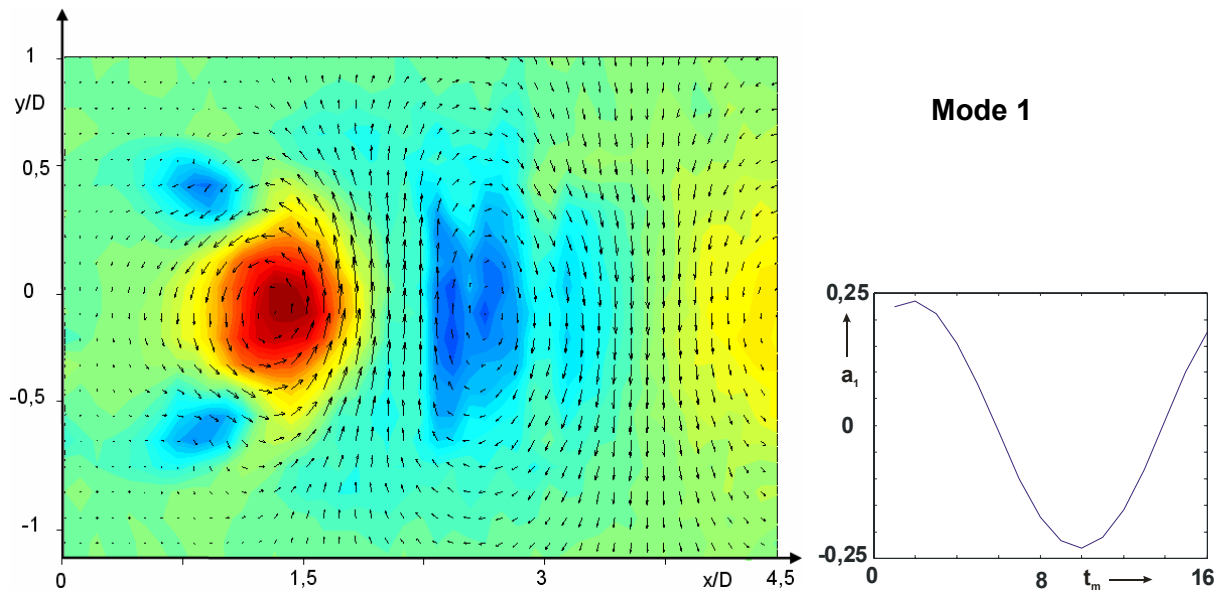
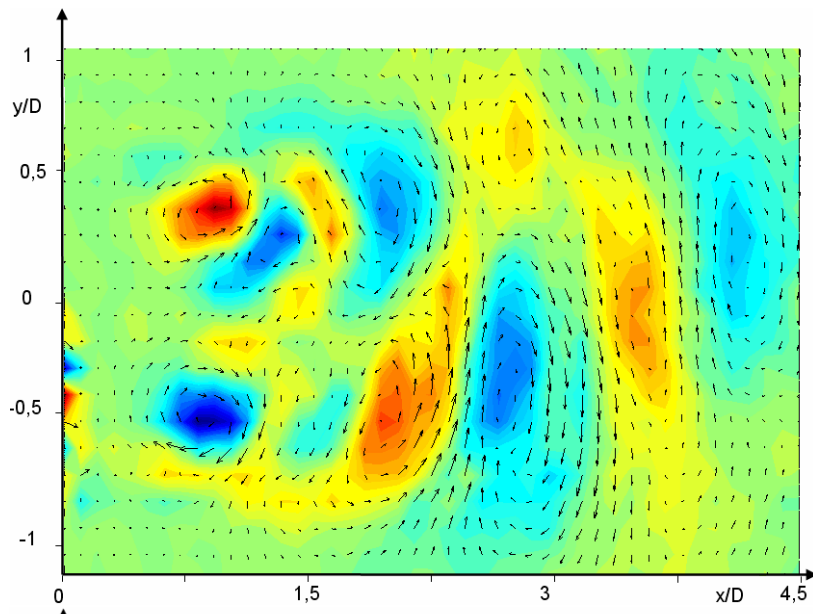
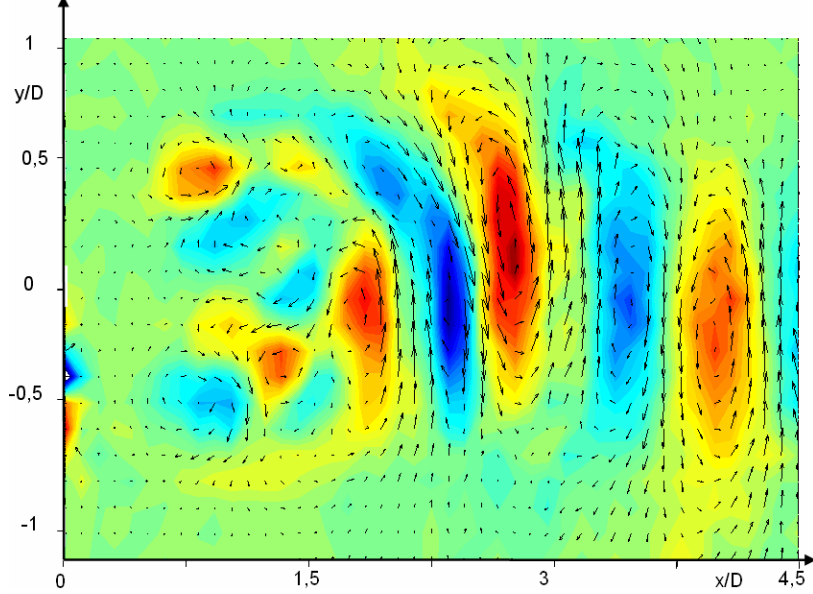
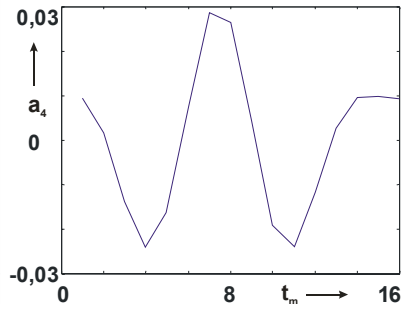


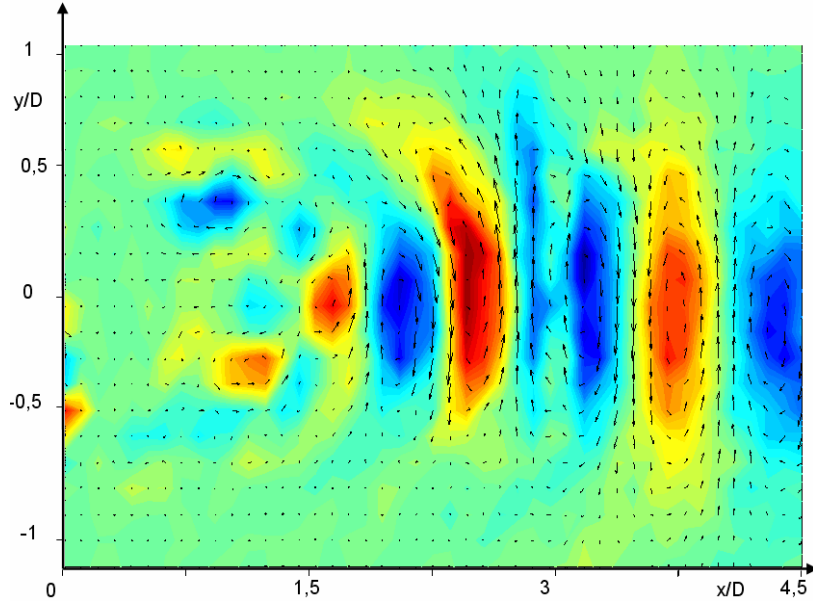
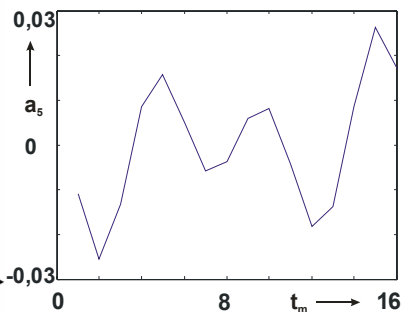
Abbildung 1: KL-Moden 1-6 aus LDA-Daten, gemessen im Zylindernachlauf bei $Re=5000$, links Geschwindigkeitsfeld und Wirbelstärke $\omega_z/|\omega_z|_{\max}$ der Mode, rechts Koeffizient $a_i(t_m)$



Mode 4



Mode 5



Mode 6

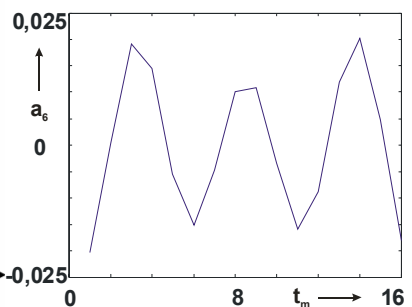


Abbildung 1 (Fortsetzung)

sem Modenpaar scheinen aus dem Bereich der Scherschichten in den Primärwirbelbereich hineingetragen zu werden. Dieser Mechanismus konnte bereits exemplarisch an TR-PIV Messungen gezeigt werden (Brede 2003). Die Energie der Moden 5 und 6 liegt annähernd auf dem gleichen Niveau wie die der Moden 3 und 4, wie an der vergleichbaren Amplitude der Koeffizienten zu erkennen ist. Mit Hilfe der KL-Moden lässt sich nun auch der Energietransfer der dabei beteiligten Moden untereinander und mit der Grundströmung bestimmen.

Wie sich bereits bei den Moden 5 und 6 andeutet, nehmen Einflüsse aus Messfehlern bei zunehmendem Modenindex deutlich zu, sie haben energetisch auch nur noch geringe Bedeutung und werden hier nicht gezeigt.

Ergebnisse – Modenzerlegung auf der Basis von TR-PIV Daten

Die gleiche Auswertung wurde mit Daten aus einer Time-Resolved PIV-Messung im Zylindernachlauf bei $Re=5000$ vorgenommen. Die Zahl der Snapshots betrug hier 511, die Aufnahmefrequenz betrug 250 Hz. Die ersten drei KL-Moden und die dazugehörigen zeitabhängigen Koeffizienten sind in Abbildung 2 dargestellt. Obwohl die als Snapshots verwendeten instantanen PIV-Felder wesentlich stärkere Unregelmäßigkeiten zeigen als die bereits phasengemittelten LDA-Felder, ergibt sich eine klare Struktur für die erste und zweite Mode der Schwankungsbewegung. In diesen beiden Moden ist, wie auch bei den LDA-Daten, die primäre Wirbelstraße zu erkennen. Bei der dritten und vierten Mode lassen wieder die abgelöste Scherschicht und der Bereich des neu entstehenden Primärwirbels finden, die einen deutlichen Einfluss auf das kleinskalige Wirbelfeld haben. Allerdings ist im Wirbelstärkefeld keine eindeutige Wellenlänge in diesen Moden zu identifizieren.

Die zeitabhängigen Koeffizienten beschreiben jetzt jedoch mehrere Perioden und unterliegen bereits bei Moden 3 und 4 deutlichem Rauschen. Hier bietet sich ein weites Feld für Verbesserungen, vorrangig soll die Qualität der TR-PIV Messung verbessert werden. Dann ist zu prüfen, ob die KL-Zerlegung für den Fall einer Verfügbarkeit von Snapshots aus vielen Perioden der Grundschwingung modifiziert werden kann.

Diskussion

Mit den Ergebnissen konnte gezeigt werden, dass die Karhunen-Loève Zerlegung auch für experimentelle Messdaten ein geeignetes Werkzeug zu Analyse zeitabhängiger Strömungsfelddaten ist. Die für die Transition des Nachlaufs wesentlichen Phänomene, wie die Instabilität der abgelösten Scherschicht, lassen sich anhand der KL-Moden identifizieren

Die Karhunen-Loève Zerlegung bietet gegenüber den Spektralverfahren, zusätzlich zur Frequenzinformation in den Koeffizienten, eine räumliche Information über die Struktur des Schwankungsanteils des Geschwindigkeitsfeldes. Ein weiterer großer Vorteil ist die hier nicht gezeigte Möglichkeit, durch Einsetzen der experimentell gewonnenen KL-Moden in die Bilanzgleichung für die turbulente kinetische Energie, die Energieflüsse der turbulenten Schwankungsbewegung zu ermitteln. Dabei kann nicht nur der Übergang von kinetischer Energie aus der mittleren Bewegung in das KL-Modensystem bestimmt werden, sondern auch der Austausch von kinetischer Energie zwischen den einzelnen Moden wird ermittelt. Die KL-Modenzerlegung wird daher in Zukunft ein Standardverfahren zur Analyse experimentell ermittelter zeitabhängiger Geschwindigkeitsfelder sein.

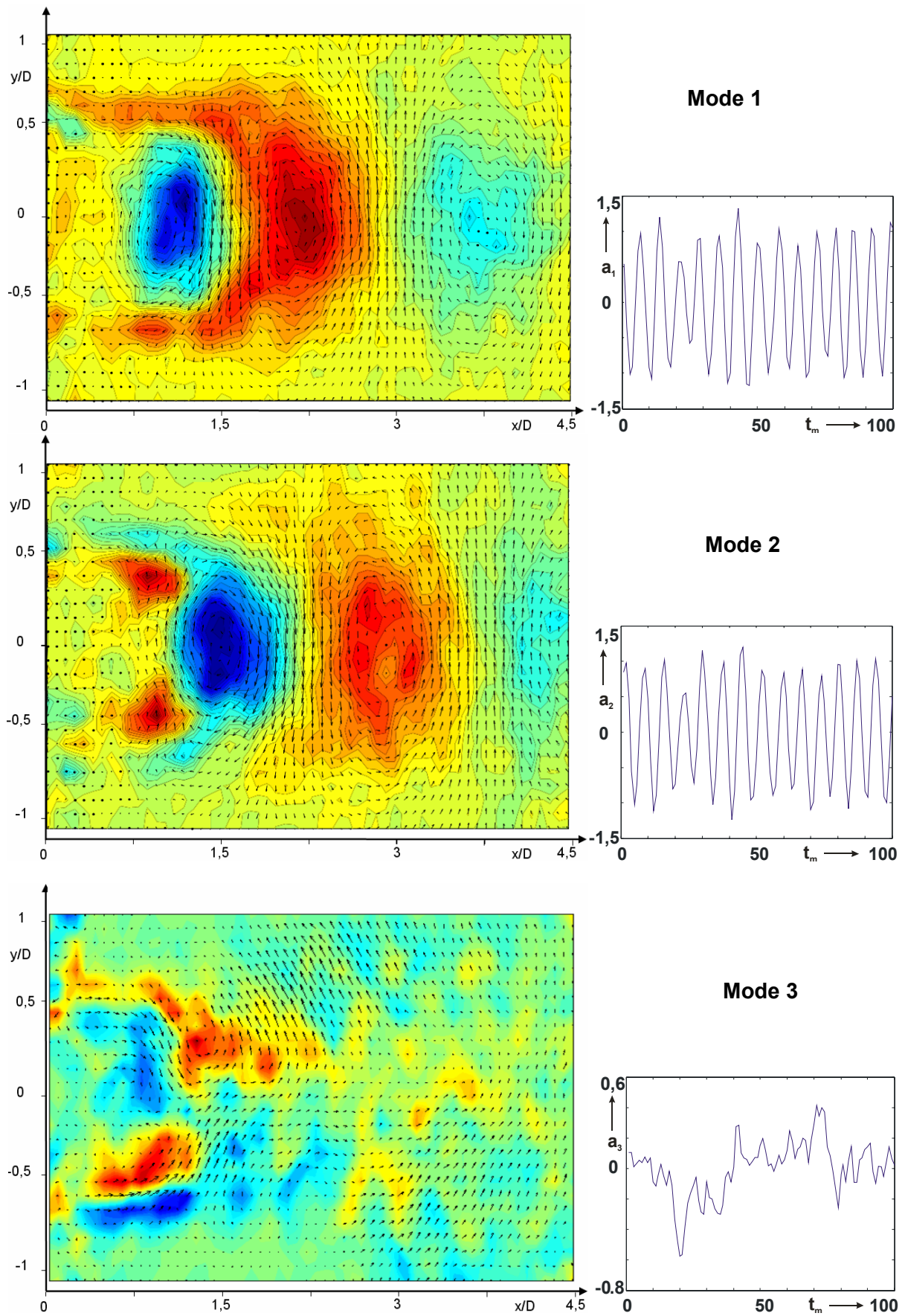


Abbildung 2: KL-Moden 1-3 aus PIV-Daten, gemessen im Zylindernachlauf bei $Re=5000$, links Geschwindigkeitsfeld und Wirbelstärke $\omega_z/|\omega_z|_{max}$ der Mode, rechts Koeffizient $a_i(t_m)$

Literatur

- Brede, M., Leder, A.: „On the structure of turbulence in the transitional cylinder wake“, *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics III*, Notes Numer. Fluid Mech. 77, Springer, Berlin p. 189-196 (2002)
- Brede, M.: „Measurements of turbulence production in the cylinder separated shear-layer with event triggered Laser-Doppler anemometry“, *Exp. In Fluids* 36, p 860 – 866 (2004)
- Brede, M., Leder, A.: „Frequenz- und Strukturanalyse des instationären Zylindernachlaufs in der Transition mit Hilfe von LDA und TR-PIV Messdaten“, *Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik 2004*, p.15-1 – 15-7 (2004)
- Holmes, P., Lumley, J.L., Berkooz, G.: „Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry“ Cambridge University Press (1998)
- Karhunen, K.: „Zur Spektraltheorie stochastischer Prozess“, *Annaleas Academiae Scientiarum Fennicae*, Vol. 34 (1946)
- Leder, A. und Geropp, D.: „Phase-averaged LDA measurements in turbulent separated flows“, in: Durao, D.F.G. (Editor): *Proceedings of the fourth International Symposium on Applications of Laser-Anemometry to Fluid Mechanics*, Lissabon, Portugal (1988)
- Loève, M.: „Probability Theory“, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1955)
- Noack, B.R., Afanasiev, K., Morzynski, M., Tadmor, G., Thiele, F.: „Hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake“, *J. Fluid Mech.* 497, p. 335-364 (2003)
- Sirovich, L.: „Turbulence and the Dynamic of Coherent Structures Part 1-3“, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 45, No. 3, pp. 561-590 (1987)