

## Transformation von zeitlichen in räumliche Statistiken – zwei Alternativen zur Taylor-Hypothese

H. Nobach, K. Chang, E. Bodenschatz

Laboratory of Atomic and Solid State Physics, Cornell University, 616 Clark Hall of Science, Ithaca, NY 14853-2501, USA

Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation, Bunsenstr. 10, 37073 Göttingen

### Abstract

Es werden zwei Alternativen zur Taylorschen Annahme einer eingefrorenen Strömung zur Transformation zeitlicher in räumliche Statistiken von Geschwindigkeitsmessungen vorgestellt, die ausschließlich auf statistischen Annahmen basieren und ohne strömungsphysikalische Modelle auskommen. Anhand von Ein- und Zweipunktmessungen und den aus diesen berechneten Raum-Zeit-Korrelationen wird die Wirksamkeit der Transformationsmethoden untersucht und gegenübergestellt. Dabei wird auch geklärt, weshalb die Taylorsche Annahme einer eingefrorenen Strömung trotz der unzureichenden Wiedergabe des physikalischen Strömungsprozesses bei hohen Turbulenzgraden von z. B. 25% nur zu sehr geringen systematischen Fehlern der räumlichen Statistiken führt.

### 1 Einleitung

Die Bestimmung räumlicher Statistiken von Strömungsprozessen ist dank der bildgebenden Messverfahren in den letzten Jahren weit fortgeschritten. Dennoch besteht aufgrund der beschränkten Auflösung oder Verfügbarkeit dieser Verfahren der Bedarf, aus zeitlich hochaufgelösten Einpunktmessungen, z. B. mittels Laser-Doppler- oder Hitzdraht-Anemometrie gewonnenen Geschwindigkeitsdaten, neben zeitlichen Statistiken, wie Korrelations- und Strukturfunktionen sowie Leistungsdichtespektren auch deren räumliche Pendanten zu berechnen. Die aus dem aufgenommenen, zeitlichen Datensatz berechneten, zeitlichen Statistiken werden hierzu oft unter der Annahme einer gleichmäßigen Konvektion und der Vernachlässigung jeglicher Diffusionsprozesse (Taylorsche Annahme einer eingefrorenen Strömung, [8]) in die räumlichen Funktionen konvertiert. Am Beispiel des Korrelationskoeffizienten ergibt sich

$$\rho_x(\xi) = \rho_t(\tau) \quad \text{mit } \tau = \xi/\bar{u} \quad (1)$$

mit dem zeitlichen Korrelationskoeffizient  $\rho_t(\tau)$ , dem räumlichen Korrelationskoeffizient  $\rho_x(\xi)$  und der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{u}$ .

Diese Methode setzt voraus, dass die Schwankungen der momentanen Geschwindigkeit klein gegenüber der mittleren Geschwindigkeit sind. Während, wie zu erwarten ist, der systematische Fehler durch diese Transformationsmethode mit dem Turbulenzgrad oberhalb von 25% stark zunimmt, funktioniert das Verfahren erstaunlicherweise bei Turbulenzgraden unterhalb von 25% sehr zuverlässig.

In den folgenden Abschnitten werden zwei alternative Transformationsmethoden eingeführt, die den turbulenten Charakter der Strömung berücksichtigen und auch für höhere Turbulenzgrade geeignet sind. Die Ergebnisse der Transformationen werden mit räumlichen Statistiken

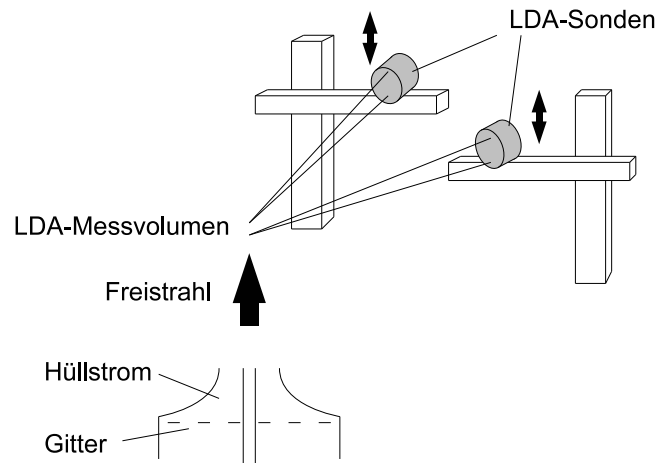


Abbildung 1: Prinzipskizze des experimentellen Aufbaus

aus Zweipunkt-LDA-Messungen verglichen. Dabei wird auch geklärt, weshalb die fehlerhafte Annahme einer eingefrorenen Strömung zu so geringen systematischen Fehlern der räumlichen Statistiken führt.

Im Gegensatz zu den theoretischen Ableitungen von Lumley [6], Antonia et al. [1] oder Hill [4] mit Taylor-Reihen unterschiedlichen Grades basieren die Berechnungen hier auf bedingten Wahrscheinlichkeiten. Für die Analyse experimenteller Daten liegt der große Vorteil in der Vermeidung von numerischen Differentiationen, die aufgrund der Differenzenbildung sehr rauschempfindlich sind.

Die zeitlichen und räumlichen Statistiken werden grundsätzlich als Schnitt durch äquivalente Raum-Zeit-Statistiken betrachtet. Diese Betrachtungsweise und die Ergebnisse sind denen von Fisher und Davies [3] sowie Cenedese et al. [2] vergleichbar. Allerdings wird dort die Dämpfung der Korrelation mit der Ausbreitung der Strömung auf Transferfunktionen zurückgeführt, die Fluktuationen der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von deren Frequenzen entweder unterschiedliche Konvektionsgeschwindigkeiten oder Dämpfungen der Amplitude zuordnen. Demgegenüber wird hier ein wesentlich einfacheres Modell der Strömungsausbreitung verwendet, welches ohne die zwar sinnvoll interpretierbaren, aber schlecht vorhersagbaren Transferfunktionen auskommt.

Eine weitere Änderung der hier vorgestellten Betrachtungen gegenüber früheren Arbeiten ist die Berechnung von Zeiten, die ein Fluidelement zum Überwinden von vorgegebenen Distanzen benötigt gegenüber der Berechnung des innerhalb einer bestimmten Zeit zurückgelegten Weges. Hieraus ergeben sich weitreichende mathematische Konsequenzen: Während ein Teilchen nach einer vorgegebenen Zeit immer eindeutig an irgendeinem Punkt ist, kann die Umkehrung zu Mehrdeutigkeiten führen, da ein Teilchen bei auftretenden Rückströmungen auch mehrfach einen Messpunkt passieren kann. Der Vorteil dieser Umkehrung muss sich in weiteren Untersuchungen erweisen.

## 2 Experimenteller Aufbau

Die LDA-Messungen<sup>1</sup> wurden in einem isothermen Freistrahlf (Luft) durchgeführt. Die beiden LDA-Messsonden nehmen unabhängig voneinander Geschwindigkeitsdaten in der Strahlachse auf, wobei die beiden Messvolumen in Hauptströmungsrichtung gegeneinander versetzt sind

<sup>1</sup>Das Experiment wurde von Christoph Schneider am Fachgebiet Energie- und Kraftwerkstechnik der Technischen Universität Darmstadt mit der Förderung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen des SFB 568 durchgeführt. Die Daten wurden in [7] vorgestellt und sind teilweise öffentlich zugänglich [10].

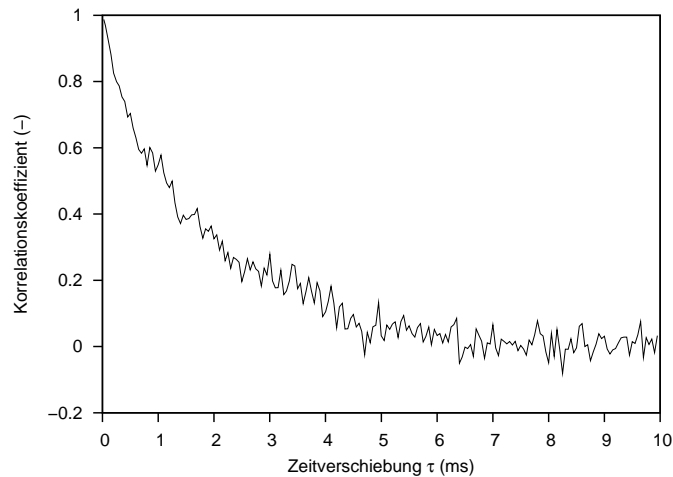


Abbildung 2: Zeitlicher Autokorrelationskoeffizient der Einpunktmessung

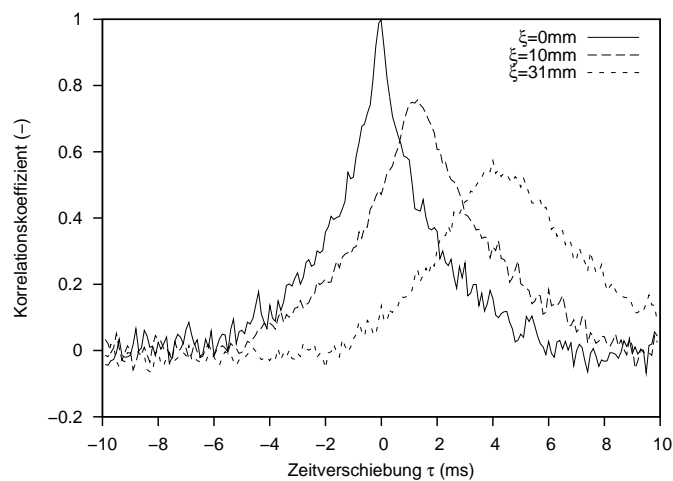


Abbildung 3: Zeitliche Kreuzkorrelationskoeffizienten von ausgewählten Zweipunktmessungen

(Abbildung 1). Die Messung erfolgt im Abstand von 320 mm hinter dem Strahlaustritt, der einen Durchmesser von 8 mm hat. Der Turbulenzgrad beträgt hier etwa 25%. Für mehrere Messvolumenabstände wurden die Geschwindigkeitsdaten der beiden LDA-Systeme unabhängig voneinander aufgezeichnet, so dass hieraus zeitliche Kreuzkorrelationen bestimmt werden konnten. Einer der aufgenommenen Datensätze wurde zusätzlich als Einpunktdatensatz zur Bestimmung der statistischen Momente und der zeitlichen Autokorrelationsfunktion genutzt.

### 3 Allgemeine Datenauswertung

Aus einem der aufgenommenen Datensätze wird zunächst die zeitliche Funktion des Autokorrelationskoeffizienten  $\rho_t(\tau)$  bestimmt (Abbildung 2). Diese bildet die Grundlage für die folgenden Transformationen.

Aus den Zweipunktmessungen lassen sich zunächst für jeden Messvolumenabstand  $\xi$  zeitliche Kreuzkorrelationen  $\rho_t(\tau)|_\xi$  bestimmen. In Abbildung 3 sind die Funktionen für drei ausgewählte Messvolumenabstände dargestellt. Für zunehmenden Abstand nimmt die Maximalkorrelation ab, wobei sich die Position des Maximums entsprechend der Konvektion verschiebt. Ausserdem bewirken makroskopische Diffusionsprozesse eine Verbreiterung des Kurvenverlaufs.

Da der zeitliche Kreuzkorrelationskoeffizient eine direkte Funktion des Messvolumenabstandes

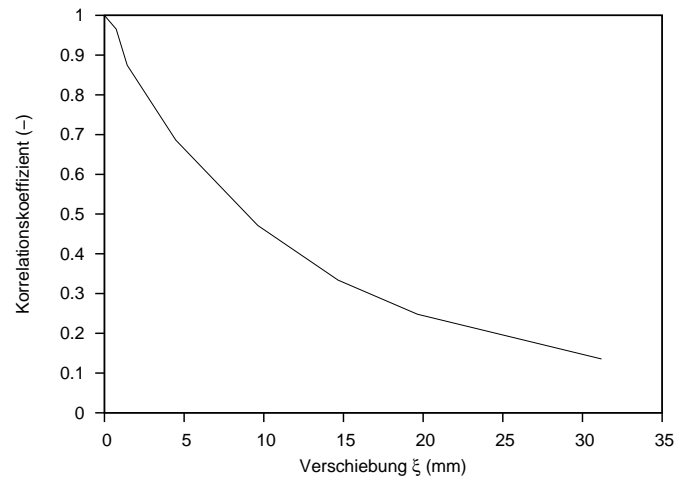


Abbildung 4: Räumlicher Korrelationskoeffizient aus den Zweipunktmessungen

ist, können diese Funktionen auch als Raum-Zeit-Korrelation  $\rho_{x,t}(\xi, \tau)$  interpretiert werden. Eine räumliche Korrelationsfunktion entsteht demnach bei einem Schnitt durch die Raum-Zeit-Korrelation mit einer bestimmten Zeitverschiebung. Wird der Schnitt bei  $\tau = 0$  durchgeführt (Koinzidenz der beiden Messsysteme), so entsteht die klassische, räumliche Korrelationsfunktion  $\rho_x(\xi)$  (Abbildung 4).

## 4 Transformationen

### 4.1 Taylor-Annahme

Wird von einer eingefrorenen Strömung ausgegangen, so haben die im Strömungsfaden unregelmäßig angeordneten Streuteilchen eine feste räumliche Beziehung zueinander. Wird der Strömungsfaden durch zwei Messvolumen im Abstand  $\xi$  hindurchgeführt, so wird dasselbe Teilchenmuster als zeitliche Folge von Geschwindigkeitswerten gemessen. Bei der Taylor-Annahme geht man zusätzlich zu dem eingefrorenen Strömungszustand davon aus, dass der Strömungsfaden mit einer konstanten, nämlich der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{u}$  an den beiden Messorten vorbeigeführt wird. Damit nehmen die beiden Messsysteme identische Zeitreihen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  auf, die sich nur durch eine zeitliche Verschiebung um  $\Delta t = \xi / \bar{u}$  unterscheiden.

$$u_2(t) = u_1(t - \Delta t) \quad (2)$$

Damit ist auch die Kreuzkorrelationsfunktion dieser beiden Zeitreihen bis auf die Verschiebung um  $\Delta t$  identisch zur Autokorrelationsfunktion

$$\rho_t(\tau)|_{\xi} = \rho_t(\tau - \Delta t) \quad (3)$$

die sich als Raum-Zeit-Korrelation

$$\rho_{x,t}(\xi, \tau) = \rho_t(\tau - \xi / \bar{u}) \quad (4)$$

interpretieren lässt. Für die räumliche Korrelationsfunktion, die sich als Schnitt der Raum-Zeit-Korrelation bei  $\tau = 0$  ergibt, gilt dann

$$\rho_x(\xi) = \rho_t(-\Delta t) \quad (5)$$

Wegen der Symmetrie der Autokorrelationsfunktion ist dies identisch zu Gleichung (1). In Abbildung 5 sind die zu erwartenden Kreuzkorrelationsfunktionen für drei ausgewählte Messvolumenabstände dargestellt, welche mit der Taylor-Annahme aus der Autokorrelationsfunktion

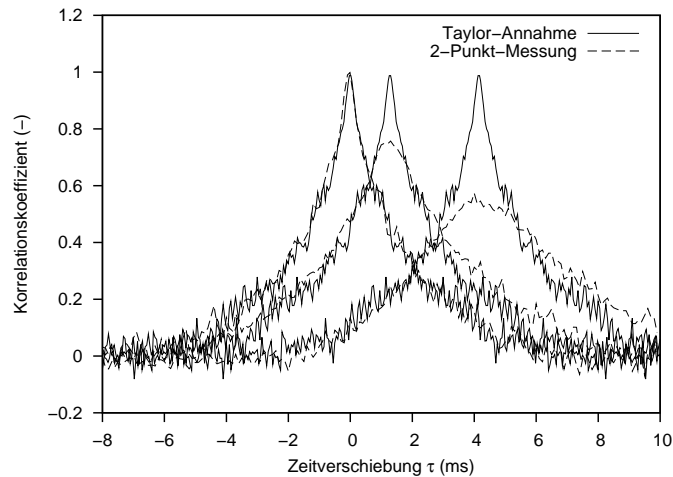


Abbildung 5: Zeitliche Kreuzkorrelationskoeffizienten der Transformation mittels der Taylor-Annahme

bestimmt wurden. Der Vergleich mit den Zweipunktmessungen zeigt deutlich die Schwächen dieser Methode. Weder die Abnahme der Maximalkorrelation noch die Verbreiterung der Kurve werden ausreichend wiedergegeben. Besonders auffällige Abweichungen treten in der Nähe des Maximums und auf dem abfallenden Kurvenabschnitt auf, während die Position des Maximums und der ansteigende Kurvenabschnitt recht gut übereinstimmen.

#### 4.2 Transformation der Zeitreihe

Für eine, gegenüber der Taylor-Annahme verbesserte Transformation, wird zunächst die konstante Konvektionsgeschwindigkeit  $\bar{u}$  der Taylor-Annahme durch die momentane Geschwindigkeit  $u(t)$  ersetzt, wobei unverändert von einer eingefrorenen Strömung ausgegangen wird. Der Strömungsfaden bewegt sich nacheinander an den beiden angenommenen Messorten vorbei, wobei die momentane Konvektionsgeschwindigkeit aus der Einzelpunktmessung mittels einer linearen Interpolation der Geschwindigkeitswerte bestimmt wird.

Mit dieser Annahme kann aus der aufgenommenen Zeitreihe der Geschwindigkeitsmesswerte die räumliche Anordnung der Teilchen im Strömungsfaden bestimmt werden. Wird dieser Strömungsfaden unverändert und ebenfalls mit der momentanen Geschwindigkeit an einem virtuellen Messvolumen im angenommenen Abstand  $\xi$  vom realen Messvolumen der Einzelpunktmessung vorbeigeführt, so entsteht eine zweite, zeitlich versetzte und leicht veränderte Zeitreihe, die dann mit der realen Messreihe korreliert wird. Die räumliche Korrelationsfunktion kann direkt aus der Messwertreihe im Strömungsfaden als Autokorrelationsfunktion der Geschwindigkeits-Ort-Reihe bestimmt werden.

Abbildung 6 zeigt die Kreuzkorrelationen für drei ausgewählte Messvolumenabstände. Die Ergebnisse dieser Transformation zeigen gegenüber der Taylor-Annahme wesentlich bessere Übereinstimmung mit den realen Strömungseigenschaften. Sowohl die Abnahme der Maximalkorrelation als auch die Verbreiterung der Kurve werden wiedergegeben. Darüber hinaus wird sogar die schiefe Verteilung mit dem flacheren Verlauf des abfallenden Kurvenabschnitts erkennbar. Nur die Höhe der Maximalkorrelation und die Korrelation auf dem absteigenden Kurvenabschnitt werden zu groß abgeschätzt, während die Position des Maximums und der ansteigende Kurvenabschnitt eine gute Übereinstimmung zeigen.

#### 4.3 Gewichtete Transformation der Korrelationsfunktion

Wird statt des eingefrorenen Strömungsfadens und einer konstanten Konvektionsgeschwindigkeit wie bei der Taylor-Annahme eine beliebige Konvektionsgeschwindigkeit  $u_K$  angenommen,

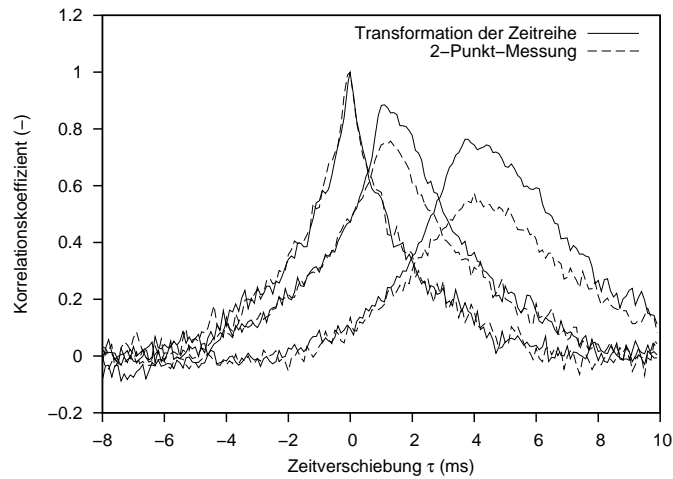


Abbildung 6: Zeitliche Kreuzkorrelationskoeffizienten der Transformation mittels der Zeitreihentransformation

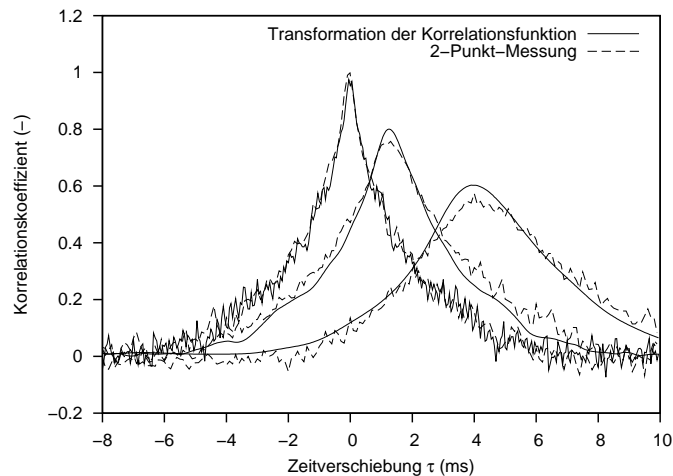


Abbildung 7: Zeitliche Kreuzkorrelationskoeffizienten der Transformation mittels der gewichteten Transformation

so ergeben sich für jede angenommene Konvektionsgeschwindigkeit unterschiedliche Transformationen der zeitlichen Autokorrelation in die Raum-Zeit-Korrelationen (vgl. Gleichung (4)).

$$\rho_{x,t}(\xi, \tau)_{|u_K} = \rho_t(\tau - \xi/u_K) \quad (6)$$

Für die Konvektionsgeschwindigkeiten wird die gleiche Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung  $p(u_K)$  angenommen wie für die gemessenen Geschwindigkeitswerte, welche hier durch den empirischen Mittelwert, die Varianz und eine angenommene Gauss-Verteilung angenähert wird. Die Überlagerung der individuellen Raum-Zeit-Korrelationen aller möglichen Konvektionsgeschwindigkeiten ergibt dann die integrale Raum-Zeit-Korrelation

$$\rho_{x,t}(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_t(\tau - \xi/u_K) p(u_K) du_K \quad (7)$$

deren Ergebnisse in Abbildung 7 dargestellt sind. Der Vergleich mit der realen Messung ergibt eine sehr gute Übereinstimmung der Kurvenverläufe auf beiden Seiten des Maximums, das in Höhe und Position gut wiedergegeben wird, einschließlich der schiefen Verteilung.

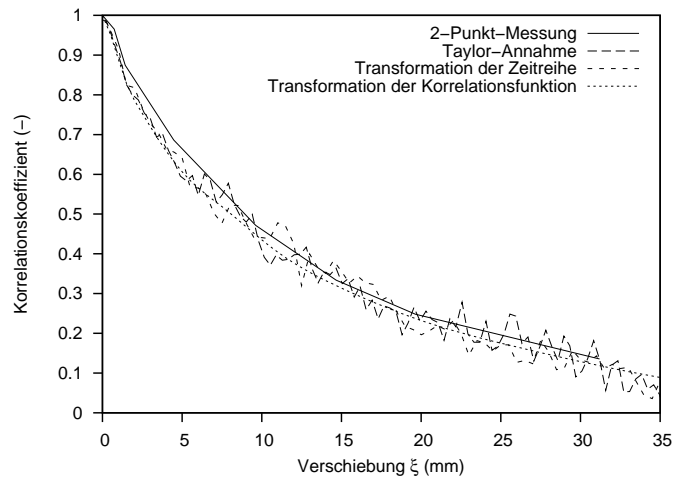


Abbildung 8: Räumlicher Korrelationskoeffizient

#### 4.4 Räumliche Korrelation

Für die drei vorgestellten Transformationen wurden die räumlichen Korrelationsfunktionen als Schnitt der Raum-Zeit-Korrelationen bei  $\tau = 0$  bestimmt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 8 den Ergebnissen der Zweipunktmessung gegenübergestellt. Die unterschiedlichen Transformationsverfahren lassen keine großen Abweichungen gegenüber der Zweipunktmessung erkennen. Demgegenüber zeigen sie aber auch untereinander keine signifikanten Unterschiede, und zwar trotz der deutlichen Unterschiede in der Raum-Zeit-Korrelationen.

Die Ursache hierfür liegt in der stets geringen Abweichung der verschiedenen Modelle auf dem ansteigenden Kurvenabschnitt der zeitlichen Kreuzkorrelationen (Abbildungen 5–7). An der Stelle  $\tau = 0$  sind bei keinem Transformationsverfahren signifikante Abweichungen von den Zweipunktmessungen zu erkennen, so dass die räumlichen Korrelationen als Ergebnisse der Transformationen und dem Schnitt der Raum-Zeit-Korrelationen bei  $\tau = 0$  sehr ähnlich sind.

### 5 Zusammenfassung

Es wurden zwei Alternativen zur Taylor-Annahme für die Transformation von zeitlichen Statistiken in räumliche anhand von Korrelationsfunktionen vorgestellt. Die Raum-Zeit-Korrelationen der Zweipunktmessungen konnten durch die für die Transformationen verwendeten Modelle deutlich besser wiedergegeben werden als von der Taylor-Annahme einer eingefrorenen Strömung mit konstanter Konvektionsgeschwindigkeit. Besonders mit der gewichteten Transformation der Korrelationsfunktion konnten zeitliche Autokorrelationsfunktionen aus Einpunktmessungen mit hoher Zuverlässigkeit in Raum-Zeit-Korrelationen überführt werden.

Es konnte geklärt werden, weshalb die Ergebnisse der Taylor-Annahme trotz der sehr unzureichenden Repräsentation der tatsächlichen Strömungsverhältnisse nur zu geringen Fehlern führen. Da dieser Fehler jedoch mit einem Turbulenzgrad oberhalb von 25% stark zunimmt, sollen Experimente in Strömungen mit höherem Turbulenzgrad die Eignung der vorgestellten, alternativen Transformationen nachweisen. Ein solches Strömungsexperiment mit zwei gegenläufig rotierenden Scheiben (Abbildung 9) wurde bereits erfolgreich zur Erforschung von Turbulenzerscheinungen eingesetzt [5, 9].

Darüber hinaus soll untersucht werden, wie sich die Transformationen der Korrelationsfunktionen auf eine anschließende Bestimmung von Taylor-Maßen auswirken. Im Gegensatz zu dem gezeigten Vergleich der Korrelationsfunktionen sind dann Unterschiede zwischen den Transformationen zu erwarten, da die relativen Fehler für kleine Zeitverschiebungen bzw. Abstände unterschiedlich sind und somit unterschiedliche Gradienten abgeleitet werden.

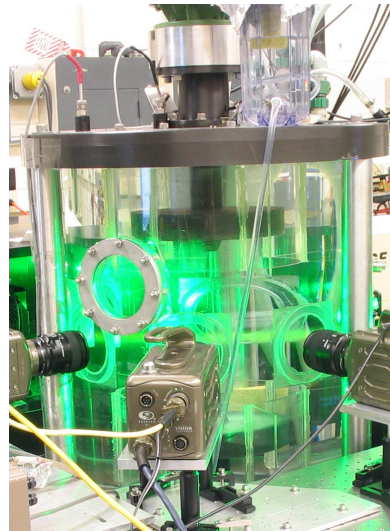
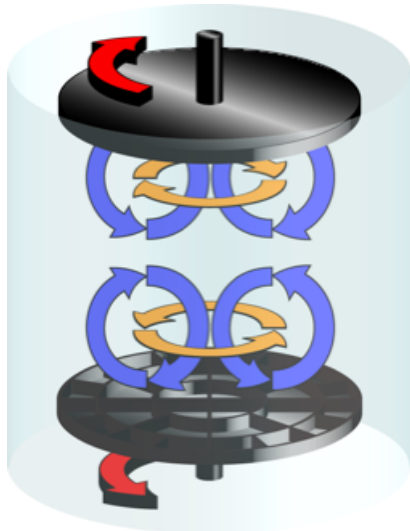


Abbildung 9: Turbulenzexperiment für hohe Turbulenzgrade

Sowohl bei der Transformation der Zeitreihe als auch bei der gewichteten Transformation der Korrelationsfunktion wird von einer mathematisch idealisierten, räumlichen Korrelation ausgegangen (identisch eins bzw. eins bei  $\xi = 0$  und null sonst), die dann durch die Transformation selbst korrigiert wird. Hieraus lässt sich in weiteren Untersuchungen eine iterative Optimierung ableiten, die die beiden hier beschriebenen Transformationsverfahren und deren Strömungsmodelle kombiniert.

### Literatur

- [1] R A Antonia, N Phan-Thien, and A J Chambers. Taylor's hypothesis and the probability density functions of temporal velocity and temperatur derivatives in a turbulent flow. *J. of Fluid Mechanics*, 100:193–208, 1980.
- [2] A Cenedese and G P Romano. Experimental testing of Taylor's hypothesis by L. D. A. in highly turbulent flow. *Exp. in Fluids*, 11:351–358, 1991.
- [3] H J Fisher and P O A L Davies. Correlation measurement in a non-frozen pattern of turbulence. *J. of Fluid Mechanics*, 8:97–116, 1964.
- [4] R J Hill. Corrections of Taylor's frozen turbulence approximation. *Atmospheric Research*, 40:153–175, 1996.
- [5] A La Porta, G A Voth, A M Crawford, J Alexander, and E Bodenschatz. Fluid particle accelerations in fully developed turbulence. *Nature*, 409:1017–1019, 2001.
- [6] J L Lumley. Interpretation of time spectra measured in high-intensity shear flows. *Phys. of Fluids*, 8:1056–1062, 1965.
- [7] H Nobach, C Schneider, A Dreizler, J Janicka, and C Tropea. Laser-Doppler-Messungen von Teilchenbeschleunigungen und der Dissipationsrate in einem runden Freistrah. In *Proc. 10. Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmeßtechnik*, 2002.
- [8] G I Taylor. The spectrum of turbulence. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.*, 164:476–490, 1938.
- [9] G A Voth, A La Porta, A M Crawford, J Alexander, and E Bodenschatz. Measurement of particle accelerations in fully developed turbulence. *J. of Fluid Mechanics*, 469:121–16, 2002.
- [10] Laser Doppler and phase Doppler signal and data processing. Internet data base at <http://ldvproc.nambis.de>.